Perron, Pierre (1988), "Trends and Random Walks in Macroeconomics Time Series", *Journal of Economics Dinamics and Control,* vol. 12, pp. 297-332.
Phillips, P.C.B. (1987), "Time Series Regression with a Unit Root", *Econometrica,* vol. 55, núm. 2, marzo, pp. 277-301.
Repetto, Andrea (1992), "Determinantes de largo plazo del tipo de cambio real: una aplicación del caso chileno (1960-1990)", *Colección Estudios CIEPLAN*, núm. 36, diciembre, pp. 67-98.
Ruprah, Inder Jit Singh (1982), "El teorema de la paridad del poder adquisitivo: inflación y tipo de cambio", *Economía Mexicana,* México, CIDE, núm. 4, pp. 61-75.
Sims, Christopher A. (1988), "Bayesian Skepticism on Unit Root Econometrics", *Journal of Economics Dynamics and Control,* vol. 12, pp. 463-474.
Sims, Christopher A. y Harold Uhlig (1991), "Understanding Unit Rooters: A Hepicopter Tour", *Econometrica,* vol. 59, núm. 6, noviembre, pp. 1591-1599.
Torres Gaytán, Ricardo (1980), *Un siglo de devaluaciones del peso mexicano,* México, Siglo XXI, 472 p.
Whitt, Joseph A. Jr. (1992), "The Long-run Behavior of the Real Exchange Rate: A Reconsideration", *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 24, núm. 1, febrero, pp. 72-82.

La medición del trabajo abstracto

Adolfo García de la Sienra

Resumen: De acuerdo con Aristóteles, la reciprocidad en el intercambio mercantil debe estar basada en una proporcionalidad del trabajo de los diferentes productores. Éste es el hecho que da origen a la teoría del valor trabajo, la cual estudia precisamente aquellas proporciones en relación con los precios de mercado. La finalidad del presente artículo es presentar algunos resultados acerca de tal relación en una estructura económica eficiente, es decir, en un sistema de procesos de producción ninguno de los cuales es más eficiente que cualquier otro. La investigación será conducida sobre un modelo matemático consistente en un cono poliédrico convexo que admite trabajo heterogéneo, producción conjunta y técnicas alternativas. El resultado principal es un teorema acerca de la existencia de una relación determinada entre proporciones de trabajo y precios.

Abstract: According to Aristotle, reciprocity in market exchange must be based upon a proportionality of the labor of the different producers. This is the fact that gives rise to the labor theory of value, which studies precisely those proportions in relation to market prices. The goal of the present paper is to present some results about such relationship in an efficient economic structure, that is to say, in a system of production processes none of which is more efficient than any other. The investigation shall be carried on upon a mathematical model consisting of a convex polyhedric cone that admits heterogeneous labor, joint production and alternative techniques. The main result is a theorem about the existence of a determinate relationship among proportions of labor and prices.

La reciprocidad en el intercambio mercantil consiste en recibir lo justo a cambio de lo que se ha entregado. La reciprocidad puede ser con base en la igualdad o en una proporción. Un ejemplo de intercambio con base en la igualdad es recibir (el producto de) dos horas de trabajo a cambio de (el producto de) dos horas de trabajo de construcción de edificios.

Según Aristóteles, la reciprocidad en el intercambio mercantil

Adolfo García de la Sienra es investigador del CIDE.

debe ser en general con base en una proporción y no necesariamente una igualdad.[1] Tomando el mismo ejemplo como caso paradigmático, el constructor debe dar de su trabajo al zapatero y obtener algo a cambio. Ello requiere que sus trabajos sean comparados entre sí, ya que todas las cosas que han de ser intercambiadas deben ser comparables de algún modo. Esta comparación se hace a través del dinero, cuando se observa que el precio de (el producto de) tantas horas de construcción es idéntico al de (el producto de) tantas horas de zapatería. Ahora bien, no tiene que ser necesariamente que (el producto de) una cantidad de horas de construcción sea igualado (mediante los precios) con (el producto de) la misma cantidad de horas de zapatería. Según Aristóteles —y esto es algo que se observa en la experiencia— la comparación puede darse sobre la base de una *proporcionalidad* entre los trabajadores que participan en el intercambio. Por ejemplo, el número de zapatos intercambiados por una casa (o por una cantidad dada de comida) debe corresponder a la razón (proporción) del constructor al zapatero.

Ahora bien, establecer esta proporción del constructor al zapatero, o en general y con más precisión de un trabajo de tipo A a uno de tipo B, equivale a reducir los diferentes tipos de trabajos a una medida común, a expresarlos todos en términos de un tipo de trabajo. De la misma manera que es posible escoger un numerario, es decir, un tipo de mercancía que sirva como unidad de intercambio para todos los otros tipos de bienes, también es posible escoger un tipo de trabajo (como zapatería) y expresar la unidad de tiempo de cualquier otro trabajo como equivalente a un cierto número de unidades de tiempo del primero.

Supóngase, por ejemplo, que una casa requirió 1 000 horas de trabajo de un constructor para ser producida a partir de materiales brutos, mientras que la producción de un par de zapatos requiere tres horas para ser producido a partir de pieles que supondremos también obtenidas sin trabajo para simplificar el análisis (esta restricción se eliminará luego). Sobre una base igualitaria de intercambio, deberían cambiarse unos 334 pares de zapatos por la casa; *i.e.* si el precio de un par es de 150 pesos, entonces la casa debería valer 50 100 pesos. En cambio, si se establece que la proporción del trabajo del constructor al del zapatero es de 2:1, entonces el precio de cada producto obtenido en una hora de construcción debe tener un precio dos veces superior al del

[1] *Ética nicomaquea,* libro V, sección V. Véase la referencia al final de este artículo.

producto de una hora de zapatería. De esta manera, 1 000 horas de trabajo del constructor equivalen a 2 000 horas de trabajo del zapatero y es así que el zapatero tendría que entregar unos 667 pares de zapatos al constructor por la misma casa. Esto significa que la casa debe valer entonces 100 050 pesos en el supuesto de que el precio del par de zapatos haya sido fijado en 150 pesos.

Aristóteles sostenía que la proporción entre los diferentes trabajos debería fijarse *antes del intercambio,* cuando ambas partes aún están en posesión de lo suyo. Esto significa que al entrar al mercado los productores de la mercancía (o servicio) deben tener una idea de las proporciones entre los trabajos. ¿Qué proceso es el que determina esta idea? Marx contestó esta pregunta diciendo que, en todo caso, es un proceso social que se desenvuelve "a espaldas de los productores". Parecería que en una economía de mercado este proceso no podría ser otro sino el proceso de equiparación e intercambio de bienes en el mercado, pero esto sólo nos hace dar vueltas en círculo, pues el problema consiste en determinar los criterios para esa equiparación. Si, como dice Aristóteles, esta equiparación se debe hacer *antes* del intercambio, entonces no es posible decir que es el resultado del mismo. El intercambio no es un proceso ciego sino una relación social entre personas que regatean dentro de ciertos márgenes. Como decía el mismo Marx: "se vuelve obvio que no es el intercambio el que regula la magnitud de valor de la mercancía, sino a la inversa: la magnitud de valor de la mercancía la que rige sus relaciones de intercambio".[2]

Esta idea de valor no es otra sino la de las proporciones entre trabajos señalada por Aristóteles. Pero, ¿quién fija estas proporciones? Pensando siempre en una economía de mercado, no hay duda que la ley de la oferta y la demanda tiene un efecto en esta fijación. Si hay un intenso deseo de zapatos en la sociedad y hay poca producción de los mismos, no hay duda de que el trabajo del zapatero será estimado como muy alto. Pero supongamos, para evitar esta complicación, que nos encontramos en un estado de equilibrio entre la oferta y la demanda, de modo que hay un flujo exacto de bienes y servicios para la demanda existente. En este caso, ¿por qué habría de ser más valioso el trabajo del constructor que el del zapatero?

La respuesta usual a este tipo de preguntas es que ser constructor requiere estudios, preparación, una calificación más ardua y difícil que

[2] *El capital,* vol. 1, t. 1, p. 78. Para una discusión detallada de esta tesis véase García de la Sienra (1992), cap. 1.

la del zapatero. Ello requiere que se asigne más "dignidad" al constructor que al zapatero, en la forma de un valor más alto para sus productos, con el fin de incentivar la formación y el mantenimiento de constructores en la sociedad. Es decir, la *institución* de un mercado en una sociedad determinada requiere un cierto consenso social acerca de las dignidades de los trabajos involucrados. Lo interesante del caso es que la fijación de esta dignidad depende sólo en parte de la calificación del trabajo y puede estar codeterminada por otros factores de índole cultural (como un cierto valor social de equidad). Esto se aprecia, por ejemplo, en las enormes diferencias que hay entre los países industrializados y los latinoamericanos respecto a las proporciones entre trabajos muy calificados (profesiones) y oficios (como la que hay entre un ingeniero y un albañil). Es sabido que esas diferencias son mayores en América Latina.

La teoría del valor-trabajo se encarga de estudiar el conjunto de todas las proporciones entre los trabajos que son económicamente viables. Su aplicación a casos concretos requiere, no obstante, una inmersión en los detalles culturales de las sociedades que se desea estudiar. El problema que quiero investigar aquí es éste: dada una estructura económica eficiente, es decir, de procesos de producción de los cuales ninguno es más eficiente que otro, ¿como se relaciona un sistema dado de proporciones entre trabajos con un sistema de precios? Y viceversa: ¿cómo se relaciona un sistema dado de precios con un sistema de proporciones? Más aún, ¿en qué condiciones existe una relación entre ambos? Un sistema de proporciones entre todos los trabajos concretos será llamado "reducción".

La investigación será llevada a efecto sobre un modelo matemático consistente en un cono poliédrico convexo que admite producción conjuntiva y técnicas alternativas.

El modelo

Imaginemos una sociedad en la que hay n tipos de oficios o trabajos heterogéneos y m tipos de bienes y servicios. Un proceso de producción en tal estructura puede ser representado mediante un vector de la forma $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, donde: $\mathbf{x}$ es un vector n-dimensional que representa las cantidades de trabajos concretos empleadas en el proceso; *i.e.* las cantidades de tiempo de trabajo de cada tipo, medido por ejemplo en

horas, requerido para las tareas involucradas en el proceso; $\underline{\mathbf{x}}$ es un vector m-dimensional que representa las cantidades de insumos y $\overline{\mathbf{x}}$ es un vector también m-dimensional que representa las cantidades de productos. El producto neto del proceso es representado mediante el vector $\hat{\mathbf{x}}$, el cual no es sino la diferencia $\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}$. Las entradas negativas de $\hat{\mathbf{x}}$ representan, desde luego, las cantidades netas de insumos requeridas para producir los productos netos, mismos que están representados por las entradas positivas. Estos conceptos quedan recogidos en la siguiente definición.

Definición 1. *Un proceso de producción* es un vector $\tilde{\mathbf{x}}$ en el espacio lineal $\mathbb{R}^{2m+n}$ donde $m, n \geq 1$, tal que el vector de n dimensiones $\mathbf{x}$, así como los vectores de m dimensiones $\underline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{x}}$ son todos no negativos. El vector $\mathbf{x}$ es llamado el *vector de insumos* o *inputs laborales*, o *de trabajo*, $\underline{\mathbf{x}}$ es llamado *el vector de medios de producción* o *vector input*, y $\overline{\mathbf{x}}$ es el *vector producto* o *vector output*. La diferencia $\hat{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}$ es llamada el *output neto* del proceso $\tilde{\mathbf{x}}$. Decimos que un conjunto de procesos de producción Y es no trivial si y sólo si para cada $i = 1, \ldots, n$ existe un proceso $[\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \in Y$ tal que la i-ésima componente de $\mathbf{x}$ es positiva y, para cada $j = 1, \ldots, m$, existe un proceso de producción $[\mathbf{y}, \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}] \in Y$ tal que la j-ésima componente de $\hat{\mathbf{y}}$ es distinta de cero.

Aquí nos interesa considerar una estructura económica representada como un cono poliédrico convexo; es decir, un conjunto Y de procesos de producción generado por un número finito de procesos de producción:

$$Y = \left\{ \tilde{\mathbf{x}} \mid \tilde{\mathbf{x}} = \sum_{h=1}^{l} \alpha_h \tilde{\mathbf{x}}_h \ \text{ para algunos } \ \alpha_h \geq 0 \right\}.$$

Obsérvese que, conforme a la definición, $\tilde{\mathbf{0}} \in Y$.

Asociadas con el concepto de conjunto de procesos de producción se hallan las siguientes nociones relevantes. El *conjunto de procesos de producción en versión flujo*, $\hat{Y}$, es definido como la colección

$$\hat{Y} \equiv \{[-\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}] \mid \hat{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}} \ \text{ para algún } [\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \in Y\}.$$

El *conjunto de gastos de trabajo concretos*, L, es definido como la colección

$$L \equiv \{\mathbf{x} \mid [\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \in Y\}.$$

Finalmente, el *conjunto de productos netos* es la familia

$$N \equiv \{\hat{\mathbf{x}} \mid [\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \in Y\}.$$

Una de las propiedades de los procesos de producción que es de particular interés desde el punto de vista de la economía es la eficiencia. El concepto de eficiencia es comparativo, de modo que sólo cabe hablar de procesos que son más eficientes que otros, pero no de procesos absolutamente eficientes. Un proceso $[\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$ es más eficiente que uno $[\mathbf{y}, \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}]$ si $[\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$ gasta menos trabajo o insumos netos que $[\mathbf{y}, \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}]$, pero produce al menos tanto producto neto como $[\mathbf{y}, \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}]$; o bien gasta menos trabajo pero produce al menos tanto producto neto como $[\mathbf{y}, \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}]$ sin consumir más insumos netos. Si simbolizamos mediante la letra E esta relación, podemos sintetizar estas ideas en una definición.

Definición 2. Sean $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$ y $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}, \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}]$ dos procesos de producción. Decimos que $\tilde{\mathbf{x}}$ es más eficiente que $\tilde{\mathbf{y}}$ si y sólo si el *output* neto de $\tilde{\mathbf{x}}$ es mayor que el *output* neto de $\tilde{\mathbf{y}}$, aun cuando $\tilde{\mathbf{x}}$ no emplee más servicios de trabajo de cualquier tipo que $\tilde{\mathbf{y}}$; o bien el *output* neto de $\tilde{\mathbf{x}}$ es mayor o igual que el *output* neto de $\tilde{\mathbf{y}}$, aun cuando $\tilde{\mathbf{x}}$ emplee menos servicios de trabajo de algún tipo que $\tilde{\mathbf{y}}$. En símbolos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}\, E\, \tilde{\mathbf{y}} \Leftrightarrow & \text{ o bien } \mathbf{x} \leqq \mathbf{y} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{y}}, \\ & \text{ o bien } \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{x}} \geqq \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

donde '$\tilde{\mathbf{x}}E\tilde{\mathbf{y}}$' significa '$\tilde{\mathbf{x}}$ es más eficiente que $\tilde{\mathbf{y}}$'. Un conjunto de procesos de trabajo Y es *eficiente* si, para todo $\tilde{\mathbf{x}} \in Y$, no existe un $\tilde{\mathbf{y}} \in Y$ tal que $\tilde{\mathbf{y}}E\tilde{\mathbf{x}}$.

La teoría del valor-trabajo ha sido entendida como una doctrina que enseña que sólo tienen precio (o deberían tenerlo) los bienes que son fruto del trabajo. Esto implica, en particular, que la tierra ricardiana[3] carece de precio, lo cual va en contra de la experiencia. Más bien, una tesis central de la teoría del valor-trabajo, como yo la entiendo,

[3] Esto es, una superficie sobre la faz de la Tierra capaz de recibir la radiación solar.

es que los productos netos de dos procesos iguales en todo respecto, excepto que en el primero hay más trabajo incorporado que en el segundo, deben tener precios distintos, siendo mayor el precio total del producto neto del segundo. Así, por ejemplo, tendría un precio mayor un metro cuadrado de tierra ricardiana a la que se le ha agregado trabajo de limpieza, que otro metro cuadrado de la misma tierra con características idénticas o similares a la primera antes de ser limpiada.

Un sistema de precios $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ para la estructura económica Y será llamado *válido* si refleja los diferentes gastos de trabajo concreto en los procesos en Y; *i.e.* si el precio del *output* neto $\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}$, es mayor que el precio del *output* neto $\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}$, siempre que se requiera más trabajo para generar el primero que el segundo.

Definición 3. El sistema de precios $\mathbf{p}$ es *válido* para Y si y sólo si $\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$ implica $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ implica $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}$.

Es una consecuencia inmediata de la definición que la identidad en los gastos de trabajo de dos procesos implica la identidad de los precios de los productos netos resultantes; i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ implica $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}$. Por ende, la validez de un sistema de precios equivale a una cierta forma de equilibrio social: el que consiste en la remuneración idéntica de los productos netos que involucran los mismos gastos de trabajo, y en la mayor remuneración de los productos netos que involucran más. Este equilibrio abre la puerta a una forma de justicia que consiste en permitir un salario mayor a quien trabaja más, pues una menor remuneración a un mayor producto neto significaría que la empresa requiere hacer un sacrificio mayor para compensar al trabajador. Desde luego, la validez de un precio no dice nada, por sí sola, acerca de las relaciones contractuales en el interior de una empresa.

Si $\mathbf{p}$ es un sistema de precios válido y $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}$, de modo que se tiene una función $\psi: L \to \mathbb{R}$ que asigna a cada vector de gastos de trabajo $\mathbf{x} \in L$ el precio del producto neto resultante: $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}$. Esta función, que llamaremos la *función precio*, es obviamente lineal, de modo que

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{y})$$

y

$$\psi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\psi(\mathbf{x}).$$

Si bien los vectores de gastos de trabajos heterogéneos no pueden ser comparados entre sí mediante la relación $\geqq$, a menos que se dé la feliz coincidencia de que cada uno de los componentes de uno sea mayor o igual que el correspondiente componente de otro, un sistema de precios válido de hecho permite definir una relación de comparación entre todos los vectores. En efecto, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, decimos que $\mathbf{x}$ *representa más trabajo social que* $\mathbf{y}$ si $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}$, siempre que $\mathbf{p}$ sea válido para Y. Usaremos la expresión "$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$" para significar que $\mathbf{x}$ representa más trabajo social que $\mathbf{y}$. La relación $\succsim$ misma es llamada *trabajo abstracto*. Como ya es usual, $\sim$ expresa la parte simétrica de $\succsim$ y $\succ$ la asimétrica.

Se justifica interpretar la relación $\succsim$ como "más trabajo social" porque un sistema de precios válido induce de hecho una comparación de los diferentes vectores de gastos de trabajo que preserva la relación $\geq$, pues $\succsim$ es fuertemente monótona respecto a $\geq$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ implica $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Un sistema de precios válido no sólo asigna a gastos mayores de trabajo un mayor peso social (como debe de ser), sino que además está indicando en cada caso el peso relativo que la sociedad asigna a cada vector de gastos de trabajo concreto.

La relación $\succsim$ puede ser representada numéricamente mediante una función que recupera la función precio. La ventaja de demostrar la existencia de una medición de $\succsim$, sin embargo, estriba en que nos señala el tipo de unicidad de dicha función. Los siguientes lemas van dirigidos a ello.

Lema 1. $\langle L, \succsim\rangle$ *es un orden débil.*

Demostración: $\succsim$ es conectada, pues

$$\begin{aligned}\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L &\Rightarrow \psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{y}) \text{ o } \psi(\mathbf{y}) \geq \psi(\mathbf{x})\\ &\Rightarrow \mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ o } \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}.\end{aligned}$$

$\succsim$ es transitiva, pues

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \succsim \mathbf{z} &\Rightarrow \psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{y}) \geq \psi(\mathbf{z})\\ &\Rightarrow \psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{z})\\ &\Rightarrow \mathbf{x} \succsim \mathrm{z}. \ \square\end{aligned}$$

Lema 2. $\succsim$ *es débilmente asociativa.*

Demostración: Queremos probar que $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \sim (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$.

Esto equivale a la identidad $\psi(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})) = \psi((\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z})$. Pero esta identidad es obvia por la linealidad de ψ.$\square$

Lema 3. $\succsim$ *es monótona.*

Demostración: Queremos probar que $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ implica que $\mathbf{x} + \mathbf{z} \succsim \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Pero esto se deduce del hecho de que $\psi(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{y})$ implica que $\psi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{z}) \geq \psi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z} \in Y$.$\square$

Lema 4. $\langle L, \succsim, +\rangle$ *satisface la propiedad arquimediana.*

Demostración: Queremos probar que si $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ entonces para cualesquiera $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in L$ existe un entero positivo n tal que $n\mathbf{x} + \mathbf{z} \succsim n\mathbf{y} + \mathbf{u}$. Escójase cualquier entero positivo n que satisfaga la desigualdad

$$n \geq \frac{\psi(\mathbf{u}) - \psi(\mathbf{z})}{\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})}.$$

Como $\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y}) > 0$, si $\mathbf{z} \succsim \mathbf{u}$ la desigualdad se satisface con cualquier entero positivo n. De otro modo, simplemente se toma uno lo suficientemente grande. Pues se tiene

$$\begin{aligned}n(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y})) \geq \psi(\mathbf{u}) - \psi(\mathbf{z})) &\Rightarrow n\psi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{z}) \geq n\psi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{u})\\ &\Rightarrow \psi(n\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{z}) \geq \psi(n\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{u})\\ &\Rightarrow \psi(n\mathbf{x} + \mathbf{z}) \geq \psi(n\mathbf{y} + \mathbf{u})\\ &\Rightarrow n\mathbf{x} + \mathbf{z} \succsim n\mathbf{y} + \mathbf{u}. \quad \square\end{aligned}$$

Lema 5. $\langle L, \succsim, +\rangle$ *es semipositiva.*

Demostración: Queremos probar que $\psi(\mathbf{x})$ es positivo a menos que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por la validez de $\mathbf{p}$, como $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, es inmediato que $\psi(\mathbf{x}) > \psi(\mathbf{0}) = \mathbf{p}\hat{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.$\square$

Teorema 1. *Existe una función* $\phi: L \to \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$:

1) $\mathbf{x} \gtrsim \mathbf{y}$ si y sólo si $\phi(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{y})$.
2) $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})$.
3) $\phi(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Otra función θ satisface las condiciones 1-3 si y sólo si existe un $\alpha > 0$ tal que $\phi = \alpha\theta$.

Demostración: De hecho, la función ψ satisface las condiciones 1-3, pero los lemas 1-5 implican que cualquier función tal es única salvo transformaciones de similaridad. Es decir, dado un sistema de precios, la reducción que representa al trabajo abstracto inducido por el sistema de precios es única salvo multiplicación por un escalar positivo. Esta conclusión se deduce del hecho de que $\langle L, \gtrsim, + \rangle$ es una estructura extensiva cerrada.[4] □

De manera análoga a como un sistema de precios **p** expresa las proporciones de intercambio entre los diferentes bienes y servicios de la estructura económica, por medio de la comparación de cada unidad de cualquiera de ellos con un numerario, en un cierto proceso social se podrían equiparar las unidades de diferentes trabajos concretos con un estándar (digamos, trabajo de zapatería), y establecer que una hora de trabajo de cierto tipo pesa tanto como x horas de zapatería. Esto expresaría la importancia relativa que una sociedad concede a los distintos oficios en un momento dado.

Esta comparación entre los diferentes gastos de trabajo concreto se puede llevar a cabo mediante una especie de "precio virtual" o *reducción* de los trabajos heterogéneos a una medida común. Por ejemplo, si introducimos el trabajo de zapatería como estándar, podemos comparar todos los gastos de trabajo con el de zapatería mediante un vector positivo **r**. Del mismo modo que hablamos de precios válidos como precios que preservaban los gastos de trabajo concreto, podemos hablar de reducciones válidas como las que preservan las cantidades de bienes, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 4. La reducción **r** es *válida* para Y si y sólo si $\hat{\mathbf{x}} \geqq \hat{\mathbf{y}}$ implica $\mathbf{rx} \geq \mathbf{ry}$ y $\hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{y}}$ implica $\mathbf{rx} > \mathbf{ry}$.

Siendo esto así, podemos definir de modo simétrico una relación de valor entre productos netos inducida por la reducción **r**: decimos que *representa más valor que* $\hat{\mathbf{y}}$ si $\mathbf{rx} \geq \mathbf{ry}$, siempre que **r** sea válida

[4] Cfr. Definición 1 en Krantz *et al.* (1971), p. 73.

para Y. Usaremos la expresión "$\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$" para significar que $\mathbf{x}$ representa más valor que $\mathbf{y}$. Los lemas 1-5 valen *mutatis mutandis* para $\trianglerighteq$ en vez de $\gtrsim$ y N en vez de L.

Hemos establecido ciertos resultados para las relaciones de trabajo abstracto y valor, pero hasta el momento no hemos probado que estas relaciones existan. Ello será establecido en el siguiente teorema, cuya demostración requiere un lema auxiliar previo.

Lema 6. *Y es eficiente si y sólo si $\hat{Y}$ es eficiente.*

Demostración: Basta mostrar que el proceso en versión flujo $[-\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}]$ es más eficiente en $\hat{Y}$ que $[-\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}]$ si y sólo si $\tilde{\mathbf{x}} E \tilde{\mathbf{y}}$. Pero esto queda establecido mediante la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
[-\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}] \geq [-\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}] &\Leftrightarrow (-\mathbf{x} \geqq -\mathbf{y} \wedge \hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{y}}) \vee (-\mathbf{x} \geq -\mathbf{y} \wedge \hat{\mathbf{x}} \geqq \hat{\mathbf{y}}) \\
&\Leftrightarrow (\mathbf{x} \leqq \mathbf{y} \wedge \hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{y}}) \vee (\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \wedge \hat{\mathbf{x}} \geqq \hat{\mathbf{y}}) \\
&\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} E \tilde{\mathbf{y}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 2. *Si Y es eficiente entonces existe un par* $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) > \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{rx}$ *para todo* $\tilde{\mathbf{x}} \in Y$. *Más aún, para cada* $\mathbf{p}$ $(\mathbf{r})$ *válido existe un único* $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ $(\mathbf{p} > \mathbf{0})$ *que satisface esta igualdad.*

Demostración: Sean $\tilde{\mathbf{x}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}^l$ procesos de producción linealmente independientes que generan Y. Sea **A** la matriz

$$\begin{bmatrix}
-x_1^1 & \cdots & -x_n^1 & \hat{x}_1^1 & \cdots & \hat{x}_m^1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-x_1^l & \cdots & -x_n^l & \hat{x}_1^l & \cdots & \hat{x}_m^l
\end{bmatrix}$$

y sea **h** el vector columna $[r_1 \ldots r_n p_1 \ldots p_m]^{\mathrm{T}}$. Por el teorema de Stiemke,[5] la ecuación

$$\mathbf{Ah} = \mathbf{0} \tag{1}$$

[5] Véase el Teorema 2 en Kemp y Kimura (1978), p. 3

tiene una solución positiva si y sólo si la ecuación

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{b} \geq \mathbf{0} \tag{2}$$

no tiene solución.

Para mostrar que (2) no tiene solución, supóngase que **b** es una solución. En tal caso, **b** no puede ser semipositivo o positivo pues, como *Y* no es trivial, las hileras de insumos de trabajo son seminegativos y —de hecho— hay algún componente de trabajo negativo en cada columna. Si **b** tiene componentes no negativos reordénense los componentes de **b** de tal manera que las primeras *k* componentes sean las no negativas. Reordénense correlativamente las columnas de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, de modo que si *b* era la *j*-ésima componente de **b** y ahora su posición es *g*, entonces la *j*-ésima columna de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ es ahora la columna *g*-ésima. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}-\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix} &= b_1\begin{bmatrix}-\mathbf{x}^1\\ \hat{\mathbf{x}}^1\end{bmatrix}+\ldots+b_k\begin{bmatrix}-\mathbf{x}^k\\ \hat{\mathbf{x}}^k\end{bmatrix}\\ &\geq (-b_{k+1})\begin{bmatrix}-\mathbf{x}^{k+1}\\ \hat{\mathbf{x}}^{k+1}\end{bmatrix}+\cdots+(-b_l)\begin{bmatrix}-\mathbf{x}^l\\ \hat{\mathbf{x}}^l\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-\mathbf{y}\\ \hat{\mathbf{y}}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

lo cual significa que $\begin{bmatrix}-\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix}$ es más eficiente que $\begin{bmatrix}-\mathbf{y}\\ \hat{\mathbf{y}}\end{bmatrix}$. Si **b** carece de componentes positivos, entonces $\begin{bmatrix}-\mathbf{x}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \hat{\mathbf{0}}\end{bmatrix}$. En cualquiera de los dos casos se tiene una contradicción con las hipótesis del teorema.

La unicidad de **r** (o **p**) se deduce del Teorema 1, pues cualquier otra reducción **t** (o precio **q**) habrá de ser proporcional a **r** (o a **p**). □

Lo que el Teorema 2 establece no es que haya un solo par (**r**, **p**) para la estructura *Y*. Lo que establece es que hay al menos un par tal y que a cada sistema de precios (o reducción) le corresponde una sola reducción (o sistema de precios) salvo transformaciones de similaridad.

En otras palabras, una vez fijadas las proporciones entre los diferentes trabajos, se obtiene un único vector de precios relativos y viceversa: una vez dado un sistema de precios de mercado, quedan fijadas las proporciones entre los diferentes trabajos.

Conclusiones

El primer tratamiento matemático de la noción de reducción se debe a Ulrich Krause (1979). En su libro, Krause define la noción para una economía de Leontief, es decir, una en la que: *1)* el conjunto *L* de los gastos de trabajo concretos es generado por un conjunto de vectores linealmente independientes cuyas componentes, excepto una, son todas ceros; *2)* no hay producción conjunta; *3)* no hay elección de técnicas; *4)* la matriz de insumos de producción es productiva y conectada. El mismo Krause (1980) muestra la existencia de reducciones para una estructura económica con propiedades semejantes a *Y*, sólo que bajo suposiciones muy restrictivas.[6]

Quien esto escribe (1992) demostró bajo suposiciones un poco menos restrictivas que a cada precio válido corresponde al menos una cierta reducción. El presente trabajo sólo supone la eficiencia de *Y* y además prueba la existencia de pares precio *cum* reducción.

Referencias bibliográficas

Aristóteles (1992), *Ética nicomaquea*, México, Porrúa. Contiene también la *Política*, ambas en traducción de Antonio Gómez Robledo.

García de la Sienra, A. (1992), *The Logical Foundations of the MarxianTheory of Value*, Dordrecht, Kluwer.

Kemp, M.C. y Y. Kimura (1978), *Introduction to Mathematical Economics*, Nueva York, Springer-Verlag.

Krantz, D.H., R.D. Luce, P. Suppes y A. Tversky (1971), *Foundations of Measurement I*, Nueva York, Academic Press.

Krause, U. (1979), Geld und abstrakte Arbeit, Francfort, Campus Verlag. Traducción inglesa: (1982), *Money and Abstract Labour*, Londres, Verso.

——— (1980), "Abstract Labour in General Joint Systems", *Metroeconomica*, vol. 32, núms. 2-3, pp. 115-135.

Marx, K. (1990), *El capital*, México, Siglo XXI.

[6] Para una formulación y crítica de las mismas véase García de la Sienra (1992), pp. 133-137.