

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.



**SOBRE LA EXISTENCIA DE RENTA COMPARTIDA  
BAJO RESTRICCIÓN DE LIQUIDEZ EX-POST**

**TESINA**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN ECONOMÍA**

**PRESENTA**

**CARLOS DANIEL RUIZ PÉREZ**

**DIRECTOR DE LA TESINA: DR. KANISKA DAM**

**MÉXICO, D.F., OCTUBRE 2011**

## **AGRADECIMIENTOS**

Al CIDE y al CONACyT por apoyarme económicamente en mis estudios de Licenciatura.

A mi profesor y asesor, el Dr. Kaniška Dam, ya que sin su apoyo y su guía este trabajo quizás no existiría; sus consejos y sus clases fueron de valiosa ayuda en la producción de esta tesina; además de siempre haber alineado mis incentivos para que hiciera el esfuerzo alto.

A mis lectores y sinodales, cuyas críticas me han sido de gran ayuda en la elaboración de mi tesina.

A mi mamá, mi papá, Erik y Miguelito por todo su apoyo durante la realización de mis estudios de Licenciatura, por ayudarme a crecer en todos los ámbitos de mi vida y por tolerarme y entenderme todos estos años.

A mi tía Martha y tío Ismael, quienes me han apoyado a mí y a mi mamá incluso antes de que yo naciera, y ahora están conmigo en la terminación de mis estudios.

A mi tía Lili por haberme apoyado para irme de intercambio, y en mi vida en general.

A mis primos Aimé, Roy y Chucho porque me han hecho crecer como persona y por haber podido compartir tantas experiencias juntos.

A mis abuelitos Nico, Sol, Manuel y Carlos por compartir todas sus experiencias conmigo y ayudarme a crecer en todo aspecto de mi vida.

A mis mejores amigos por haber compartido incontables experiencias juntos que han formado la persona que soy ahora.

A mis profesores, así como a mis compañeros, cuyas exposiciones y discusiones han contribuido a mi formación como economista.

A toda otra persona que me ha apoyado de cualquier manera, y cuyo anonimato no disminuye en nada su aportación a este trabajo.

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                 | <b>6</b>  |
| <b>2. Revisión de literatura</b>                       | <b>11</b> |
| <b>3. El modelo</b>                                    | <b>16</b> |
| <b>4. Análisis de contratos óptimos</b>                | <b>20</b> |
| 4.1. Costo de esfuerzo aditivamente separable . . . .  | 20        |
| 4.2. Costo de esfuerzo aditivamente no-separable . . . | 23        |
| <b>5. Conclusión</b>                                   | <b>29</b> |
| <b>6. Apéndice</b>                                     | <b>30</b> |
| <b>A. Costo de esfuerzo aditivamente separable</b>     | <b>30</b> |
| <b>B. Costo de esfuerzo aditivamente no-separable</b>  | <b>34</b> |

# SOBRE LA EXISTENCIA DE RENTA COMPARTIDA BAJO RESTRICCIÓN DE LIQUIDEZ EX-POST

---

## Resumen

Hasta hace tiempo se creía que los contratos de arrendamiento óptimos sujetos a restricción de liquidez ex-post serían sólo de renta fija porque para el terrateniente es óptimo ofrecerle al arrendatario todo el incentivo (la cosecha) para que haga esfuerzo alto y que lo lleve a alta producción incluso en el peor estado de la naturaleza. Sin embargo, este documento demuestra, con un modelo de riesgo moral donde el arrendatario realiza múltiples tareas, que el efecto de sustitución de esfuerzo ayuda a explicar renta compartida incluso bajo restricción de liquidez ex-post.

---

# 1. Introducción

La diversidad que se presenta entre los contratos de arrendamiento de tierras agrícolas es un tema que ha encantado a los economistas desde hace mucho tiempo, y que continuará siendo objeto de estudio y análisis teórico hasta que se encuentre un modelo que explique satisfactoriamente lo que ocurre en la realidad. Dicha fascinación proviene de que se sabe que la estructura contractual depende de la tecnología, el desarrollo del mercado en esa área y otras características sociales y económicas del entorno, sin embargo, en la realidad se pueden ver coexistiendo 2 o los 3 tipos de contratos en un mismo tiempo y área, o distintos tipos en áreas aparentemente iguales en tanto a sus características sociales, económicas y tecnológicas.

Un contrato de arrendamiento en la agricultura obliga al arrendador o terrateniente (dueño de la tierra) a transferir temporalmente el uso de la tierra al arrendatario, quien pagará por su explotación.

Los contratos pueden ser de 3 maneras:

1. Contrato de renta compartida: Es aquel en el que se establece que el pago para el terrateniente será un porcentaje de la producción (*i. e.*, los pagos del arrendatario y del terrateniente

dependerán ambos de la cosecha).

2. Contrato de renta fija: Es aquel en el que se establece que el pago para el terrateniente será una cantidad fija (*i. e.*, el pago para el terrateniente no dependerá de la cosecha, y el pago del arrendatario dependerá completamente de ella).
3. Contrato de salario fijo: Es aquel en el que se establece que el pago para el terrateniente será toda la cosecha, a cambio de eso, se le pagará una cantidad fija al arrendatario (*i. e.*, el pago para el arrendatario no dependerá de la cosecha, y el pago del terrateniente dependerá completamente de ella).

Por ello, existen muchas preguntas como ¿Por qué existen los contratos tanto de renta compartida como el de renta fija y de salario fijo y no hay uno dominante? ¿De qué depende la elección del contrato? ¿Por qué a veces están 2 o los 3 coexistiendo en la misma área? A estas preguntas se les ha intentado hallar una respuesta haciendo uso de herramientas neoclásicas desde hace tiempo.

En un principio se creía que la renta compartida existía para mitigar o compartir riesgos (Stiglitz, 1974; Newbery, 1977). Luego otros autores explicaron el fenómeno con la presencia de riesgo moral y distintos tipos de restricción de liquidez (Eswaran y Kot-

wal, 1985; Shetty, 1988; Basu, 1992; Laffont y Matoussi, 1995; Sengupta, 1997; Ghatak y Pandey, 2000; Ray y Singh, 2001). Shetty (1988) introduce el concepto de restricción de liquidez *ex-post* (que es, intuitivamente, cuando la cosecha total del agente es tan mala que no alcanza para pagarle lo pactado al principal, por lo que debe recurrir a su riqueza inicial para saldar la deuda) como una explicación para la existencia de contratos de arrendamiento compartidos, sin embargo, luego Ray y Singh (2001) demuestran que si la restricción es *ex-post*, y se mantienen los supuestos sobre el porcentaje de reparto, siempre será óptimo un contrato de renta fija para que el arrendatario reciba el incentivo completo, haga esfuerzo alto y tenga alta producción.

Así, el objetivo de este documento es estudiar el problema de contratos de arrendamiento con renta compartida desde una perspectiva diferente. Se demostrará, con un modelo de riesgo moral en el que el arrendatario debe repartir su esfuerzo en 2 tierras, que el efecto de sustitución de esfuerzo explicaría la existencia de contratos de renta compartida incluso con restricción de liquidez *ex-post*. Se utilizará el concepto de *multitasking* definido por Holmström y Milgrom (1991). Ellos demuestran que el contrato de incentivos varía cuando la función de costos depende de 2 ac-



ciones y éstas no son aditivamente separables.<sup>1</sup> Así, este modelo permitirá brindar una visión alternativa y ofrecerá una respuesta distinta a la presentada por Ray y Singh (2001), quienes afirmaban que no era posible encontrar un contrato de renta compartida, bajo restricción de liquidez ex-post, si se mantenía el supuesto de que el porcentaje de reparto fuera de 0 a 1.

Cabe señalar que existe un trabajo de Luporini y Parigi (1996) publicado en la revista 'Economica' que analiza la renta compartida de una región italiana muy en particular haciendo uso del *multitasking*, sin embargo, la forma de abordar el problema es muy diferente a la presentada en este documento y, además, resuelve preguntas muy particulares planteadas por los autores sólo para esa región en específico.<sup>2</sup>

Para entender la existencia de contratos de renta compartida que ocurre en la realidad, el modelo propondrá que una explicación es que los terratenientes tengan su tierra dividida exógenamente en

---

<sup>1</sup>Holmström y Milgrom (1991) utilizan este modelo en el contexto del análisis de los contratos de los vendedores de bienes raíces. En este documento se analizará un modelo estilizado de *multitask moral hazard à la* Holmström y Milgrom (1991). Su modelo es muy diferente y mucho más general, pero lo que se toma de él es la idea del *multitasking* que se ve reflejada en la función de costo de esfuerzo.

<sup>2</sup>Presenta un *multitasking* en el tipo de cosecha (en *subsistence crop* y *cash crop*) y dados los *spillovers* entre las 2 cosechas, no se puede reasignar eficientemente la mano de obra para tomar ventaja de los *shocks* externos.

2 y rentársela a 1 agente, quien tendrá que dividir su esfuerzo entre ambas partes de la tierra (o a 2 agentes, uno para cada tierra). En este caso, el beneficio esperado del terrateniente cambiará de forma y se demostrará que, bajo algunas circunstancias, un contrato de renta compartida maximizará los beneficios esperados del terrateniente, incluso a pesar de que aparentemente esto lo haga incurrir en riesgos adicionales.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>El terrateniente tendrá el mismo problema de maximización pero ahora los agentes enfrentarán una parte en la función de costos que depende simultáneamente del esfuerzo en ambas tierras.

## 2. Revisión de literatura

Cheung (1969) es el primero en formular la cuestión formalmente. Dice que el contrato de renta compartida ofrece la ventaja de que se comparten los riesgos pero la desventaja de altos costos de transacción. Así, dependiendo de los costos de transacción y de la aversión al riesgo de ambos agentes, se determinará la estructura del contrato. Sin embargo, no hay razón que nos haga creer que los costos de transacción varían y no hay soporte empírico tras la teoría de que las personas elijan el contrato de renta compartida para compartir el riesgo. Después, Stiglitz (1974) y Newbery (1977) usaron un modelo *screening* por la información asimétrica en la calidad de los arrendatarios. Sin embargo, esto es poco apropiado: 1) Dada la poca movilidad rural, no hay justificación por la cual los terratenientes no conozcan cómo trabajan los arrendatarios y 2) Porque este modelo no explica el cambio en los contratos por cambios en tecnología. Además, si el problema a solucionar estuviera en los mercados con información incompleta (habilidad, crédito, etc.) bien podría hacerse un contrato de renta fija y se solucionaría el problema.

Hasta 1985 no había ninguna explicación completamente satis-

factoria. Así, Eswaran y Kotwal (1985) abordan el problema de manera diferente. Su modelo ayuda a romper con la creencia contemporánea de que a mayor riesgo mayor número de contratos de renta compartida. Sin embargo, el supuesto más fuerte es que exista algún recurso que no tenga mercado y que, además, sea crucial para el contrato. Igualmente, el modelo tiene como implicación que elegir un contrato de renta fija llevaría al terrateniente a no ayudarle nunca al arrendatario (a obtener un crédito, con conocimiento, técnica, etc.), pero esto no es realista.

Siguiendo en la línea de tiempo de esta literatura se encuentra Shetty (1988), quien intenta brindar una nueva explicación. Hasta ahora, los modelos no permiten la posibilidad de que el arrendatario no pague en caso de tener una cosecha muy mala, lo cual es factible que ocurra cuando la producción es riesgosa y la liquidez está limitada por su riqueza. Esta posibilidad de no pago al terrateniente podría desincentivar el esfuerzo del arrendatario.

El autor formula un modelo con restricción de liquidez ex-post y concluye que, *ceteris paribus*, cuanto más rico es el arrendatario, más puede perder en caso de mala cosecha y, por ello, aumenta el esfuerzo y disminuye la probabilidad de no-repago. En los resultados se ve que se alcanza el *pareto* óptimo si se establece

un contrato de renta fija y ésta es menor que los beneficios en el peor de los casos. Esto implica que si se elige a un arrendatario suficientemente rico hará el esfuerzo óptimo y no habrá pérdida de eficiencia a pesar del contrato de renta fija. Si su patrimonio es menor, el esfuerzo será directamente proporcional a su riqueza. Éstos reciben contratos de renta compartida. Hasta que se llegue a un punto de pobreza tal que no exista un posible arreglo de incentivos que lo haga hacer el esfuerzo alto, en cuyo caso el terrateniente podrá decidir no arrendar su tierra.

Después, Basu (1992) crea un modelo en el que utiliza “restricción de liquidez por bancarrota”. Ésta implica que el arrendatario se asegura una cantidad del producto debajo de la cual deja de pagar renta y, además, si el producto es lo suficientemente malo, el terrateniente tiene que subsidiar con parte del poco producto al arrendatario y le llama “restricción de liquidez fuerte”. Se puede sofisticar haciéndola ‘débil’.<sup>4</sup>

El modelo demuestra la existencia de contratos de renta compartida en algunos casos y demuestra que alejarse de renta fija y acercarse a renta compartida permite que haya una mayor compati-

---

<sup>4</sup>Es decir, suponiendo que el terrateniente no tiene que de hecho pagarle al arrendatario en caso de pésimo producto.

lidad sobre preferencia de riesgos entre arrendatario y terrateniente. Así, el modelo predice que en áreas con menores riesgos habrá más renta fija y menos renta compartida. Sin embargo, el modelo no toma en cuenta el riesgo moral en trabajo, por lo que sólo brinda una razón para elegir renta compartida sobre renta fija. En la realidad, dependerá de si éste problema de riesgo moral técnico es más importante que el de riesgo moral laboral o no para saber el contrato que predominará. Se necesita alterar el modelo para explicar la coexistencia de contratos distintos.

Luego Sengupta (1994) utiliza restricción de liquidez débil (el arrendatario recibe de pago el máximo entre lo contratado y 0). En resumen, el documento muestra que existen dos niveles de productividad críticos del proyecto moderno: Debajo de ellos el terrateniente ofrece contrato de renta fija y se elige el tradicional; entre ellos el arrendatario elige un contrato mixto de renta compartida y renta fija y se elige el tradicional, arriba de ellos el terrateniente da un contrato de renta fija y se elige el proyecto moderno (esta región tiene partes en las que no existe contrato óptimo, ni siquiera uno no-lineal).

Recientemente, Ray y Singh (2001) decidieron abordar el problema desde otra perspectiva. Primero analizan el documento de

Shetty (1988) (restricción de liquidez *ex-post*) y demuestran que solamente relajando el supuesto de que el porcentaje de reparto vaya de 0 a 1 se logra que los arrendatarios más ricos reciban contrato de renta fija y los menos ricos de renta compartida. Demuestran que cuando se limita a que el reparto esté entre 0 y 1 y hay restricción de liquidez *ex-post* el contrato de renta compartida no es óptimo nunca, a los arrendatarios muy pobres no los contrata el terrateniente y el único caso que resuelve es cuando todos los arrendatarios tienen contratos de renta fija. También muestran que cuando hay restricción de liquidez *ex-ante* existen contratos de renta compartida.

Así, la idea de restricción de liquidez *ex-post* (que es una explicación más creíble y sencilla) quedaría relegada al no poder explicar enteramente la existencia de contratos de renta compartida en la agricultura, y los autores posteriores se verían obligados a alterarla y crear nuevas formas de restricción de liquidez un poco menos intuitivas y realistas.

### 3. El modelo

Considérese una economía que consta de un principal (L), el terrateniente o arrendador dueño de 2 tierras, y un agente (T), el arrendatario al cual se le rentarán 2 tierras simultáneamente (alternativamente, pueden ser 2 arrendatarios cada uno con 1 tierra). Las 2 tierras difieren en calidad y están divididas exógenamente dada esta característica que las diferencia. La función de producción del terreno  $i = 1, 2$  está dada por  $Q_i = \theta_i e_i$ , donde  $e_i$  es el esfuerzo del arrendatario y  $\theta_i$  es la productividad para el terreno  $i$ . El modelo supone que  $\theta_i$  es una variable aleatoria tal que  $\theta_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}$ , donde  $0 < \underline{\theta}_i < \bar{\theta}_i$ , y  $Prob\{\theta_i = \bar{\theta}_i\} = \pi_i$ . Es decir, el producto proveniente de la cosecha dependerá de qué tanto se esfuerce el arrendatario por tener una buena cosecha y, además, dependerá de su suerte. Los terrenos son heterogéneos, por lo que  $\pi_1 \neq \pi_2$  pero suponemos que el valor esperado es el mismo,  $E[\theta_1] = E[\theta_2] = \hat{\theta}$ , por mera simplicidad algebraica. El arrendatario tiene una riqueza inicial,  $W \geq 0$ , dada y tiene un costo de esfuerzo, *à la* Holmström y Milgrom (1991),  $\psi(e_1, e_2)$  tal que  $\psi(0, 0) = 0$ ,  $\psi_1(e_1, e_2) > 0$ ,  $\psi_2(e_1, e_2) > 0$ , y  $\psi_{11}(e_1, e_2) \leq 0$  y  $\psi_{22}(e_1, e_2) \leq 0$  lo que asegura la concavidad del problema de



optimización.

Note que en el segundo caso  $\psi_{12} \neq 0$ , es decir, es aditivamente no-separable, lo cual implica que existe un efecto de sustitución de esfuerzo.<sup>5</sup> El problema de riesgo moral está en el esfuerzo al no ser verificable.

El terrateniente rentará la tierra al agente bajo un contrato  $(\alpha_1, \alpha_2, C)$ , tal que:

$0 \leq \alpha_i \leq 1$  es el porcentaje de renta compartida que recibe el arrendatario por el terreno  $i$ , para  $i = 1, 2$ .

$C \geq 0$  es el monto de renta fija que se le paga al terrateniente por la renta de ambas tierras.

Se dice que el contrato es renta fija si  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$  y  $C > 0$  y renta compartida si  $\alpha_i < 1$  para al menos un  $i$ .

Dado el contrato, los pagos esperados, tanto del terrateniente co-

---

<sup>5</sup>Intuitivamente, esto quiere decir que entre más esfuerzo aplique el arrendatario en tierra 1, menos esfuerzo podrá aplicarle el otro a la tierra 2. Esto puede ocurrir ya sea porque la  $W$  a perder es de ambos agentes y si un agente decide hacer menos esfuerzo en su tierra el otro preferirá hacer más esfuerzo en la suya para hacer más improbable perder su riqueza, o porque tienen alguna otra tarea en conjunto que realizar (v. gr. limpiar la casa) y si un agente quiere hacer más esfuerzo en su tierra dejará de limpiar la casa y el otro deberá reducir el esfuerzo en su tierra para limpiar la casa.

mo del arrendatario, estarán dados por:

$$\begin{aligned}
E[Y_L] &= \pi_1\pi_2[(1 - \alpha_1)\bar{\theta}_1e_1 + (1 - \alpha_2)\bar{\theta}_2e_2 + C] \\
&\quad + \pi_1(1 - \pi_2)[(1 - \alpha_1)\bar{\theta}_1e_1 + \underline{\theta}_2e_2 + C] \\
&\quad + \pi_2(1 - \pi_1)[(1 - \alpha_2)\bar{\theta}_2e_2 + \underline{\theta}_1e_1 + C] \\
&\quad + (1 - \pi_1)(1 - \pi_2)[\underline{\theta}_1e_1 + \underline{\theta}_2e_2 + W],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[Y_T] &= \pi_1\pi_2[\alpha_1\bar{\theta}_1e_1 + \alpha_2\bar{\theta}_2e_2 - C] \\
&\quad + \pi_1(1 - \pi_2)[\alpha_1\bar{\theta}_1e_1 - C] \\
&\quad + \pi_2(1 - \pi_1)[\alpha_2\bar{\theta}_2e_2 - C] \\
&\quad + (1 - \pi_1)(1 - \pi_2)[-W] - \psi(e_1, e_1).
\end{aligned}$$

Note que existe el supuesto implícito de restricción de liquidez ex-post,  $\underline{\theta}_1e_1 + \underline{\theta}_2e_2 + W = C$ , bajo el cual en caso de que ambas tierras tengan fracaso, el agente deberá pagar con la poca producción de ambas tierras y con parte de su riqueza inicial,  $W$ .

Primeramente, se analizará el caso de costo de esfuerzo separable y se mostrará que no existe contrato de renta compartida en tal caso. Después, se mostrará que con la introducción de costo de esfuerzo no-separable, es decir, la que sufre del efecto de susti-

tución de esfuerzo, se descubrirá la existencia de un contrato de renta compartida como uno de los contratos óptimos.

## 4. Análisis de contratos óptimos

### 4.1. Costo de esfuerzo aditivamente separable

Dado que el esfuerzo no es observable existe una restricción de incentivos en ambos esfuerzos. Debe asegurarse que el agente esté dispuesto a cultivar, de ahí la restricción de participación. Note que el hecho de que el esfuerzo sea separable implica que  $\psi_{12}(e_1, e_2) = 0$ , y para simplificar el modelo, el costo de esfuerzo estará dado por  $\psi(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)$ . Simplificando:

$$\begin{aligned} E[Y_T] = & \pi_1 e_1 \bar{\theta}_1 \alpha_1 + \pi_2 e_2 \bar{\theta}_2 \alpha_2 - [\pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \pi_2] C \\ & - (1 - \pi_1)(1 - \pi_2) W - \frac{e_1^2 + e_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Y finalmente, las condiciones de factibilidad para que el modelo sea realista y asegurarse que el porcentaje de reparto no supere 1.

Así, el problema de maximización del principal está dado por:

$$\max_{\{e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2, C\}} \left\{ E[Y_L | e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2, C] \right\} \quad (1)$$

$$\text{s.a. } E[Y_T | e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2, C] \geq 0, \quad (2)$$

$$(e_1, e_2) = \operatorname{argmax}_{\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}} \left\{ E[Y_T | \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \alpha_1, \alpha_2, C] \right\}, \quad (3)$$

$$1 - \alpha_1 \geq 0, \quad (4)$$

$$1 - \alpha_2 \geq 0. \quad (5)$$

Se resuelve la maximización de la restricción de incentivos y se obtienen  $e_1$  y  $e_2$ , que son máximos globales dada la concavidad estricta de  $E[Y_T]$ , en función de sus respectivas alfas. Además, se puede demostrar que la restricción de participación se satura, de donde se obtiene  $C$ .<sup>6</sup>

Así, se sustituyen los  $e_1$  y  $e_2$  de la de incentivos y  $C$  de la de participación en el problema y éste se reduce a encontrar los alfas que maximicen los beneficios del terrateniente sujeto a las 2 condiciones de factibilidad.

Supóngase el caso en el que  $\alpha_i < 1$  para cualquier  $i$ . Dadas las

---

<sup>6</sup>En los puntos en los que los beneficios del agente son estrictamente mayores a su utilidad de reserva siempre es posible ofrecer un contrato que le dé mayores beneficios al terrateniente y el arrendatario siga aceptando el contrato.

condiciones de Kuhn-Tucker se encuentra una contradicción ya que de las condiciones de primer orden se obtiene  $\alpha_i = 1 + \frac{(1-\pi_1)\theta_1}{\pi_1\bar{\theta}_1} > 1$ . Por ello, un contrato de renta fija,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , es el único posible contrato óptimo.<sup>7</sup>

Resumiendo,

**Lema 1.** *En presencia de restricción de liquidez ex-post, con el porcentaje de reparto restringido a estar entre 0 y 1 y sin el efecto de sustitución de esfuerzo, el único contrato óptimo es el de renta fija.*

La intuición detrás es clara, para lograr que el arrendatario haga su mayor esfuerzo por tener una buena cosecha se le provee el mayor incentivo posible: que toda la cosecha se la quede él. Por tanto, tener un contrato en el que parte de la cosecha se la quede el terrateniente lo desincentivaría a trabajar porque su beneficio marginal sería menor. Dado esto, incluso si la productividad es baja el terrateniente podrá obtener grandes beneficios. Note además que este problema es equivalente a resolver 2 problemas de maximización si el terrateniente contratara a 1 agente para cada tierra.

---

<sup>7</sup>Cada caso de Kuhn-Tucker se analiza con mayor detalle en el apéndice.

## 4.2. Costo de esfuerzo aditivamente no-separable

Ahora se alterará la función del costo de esfuerzo, con el mismo modelo y sin ningún supuesto extra. Esta nueva función de esfuerzo sólo hace más realista al modelo ya que permite la existencia de un *trade-off* en el esfuerzo entre las tierras, es decir, el arrendatario debe dedicar ciertas horas al cultivo y deberá decidir cuánto esfuerzo dedicar y cómo dividirlo entre ambas tierras. Por ello, aquí existe el efecto de sustitución de esfuerzo, es decir  $\psi_{12}(e_1, e_2) \neq 0$ , particularmente  $\psi_{12}(e_1, e_2) > 0$ .<sup>8</sup> Se resuelve exactamente el mismo problema de optimización anterior sólo que ahora con la nueva función de esfuerzo, tal que:

$$E[Y_T] = \pi_1 e_1 \bar{\theta}_1 \alpha_1 + \pi_2 e_2 \bar{\theta}_2 \alpha_2 - [\pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \pi_2] C - (1 - \pi_1)(1 - \pi_2) W - \frac{(e_1 + e_2)^2}{2}.$$

Se resuelve la maximización de la restricción de incentivos y se obtienen  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en función de  $e_1 + e_2$ . Por lo tanto, las alfas quedan de la forma  $\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1}$  y  $\alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2}$ . Además, se puede demostrar que la restricción de participación se satura, de donde

---

<sup>8</sup>Para simplificar el cálculo se supondrá la forma  $\psi(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2$ .

se obtiene  $C$  en función también de los esfuerzos.<sup>9</sup>

Después de todo el proceso de optimización se llega a las condiciones de primer orden:

$$\hat{\theta} - e_1 - e_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (6)$$

$$\pi_1 \bar{\theta}_1 - e_1 - e_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0 \text{ y } \lambda_1 \left( 1 - \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\pi_2 \bar{\theta}_2 - e_1 - e_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \text{ y } \lambda_2 \left( 1 - \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} \right) = 0 \quad (8)$$

CASO I: Contrato de renta compartida en ambas tierras, es decir,  $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ .

De los alfas conocidos tenemos que  $\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} < 1$  y que  $\alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} < 1$ . Además, (7) y (8) implican que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Y de la primer condición (6) tenemos que  $\hat{\theta} = e_1 + e_2$ . Esto se sustituye en los alfas conocidos y, así, se obtiene una contradicción,  $\alpha_1 = 1 + \frac{(1 - \pi_1)\bar{\theta}_1}{\pi_1 \bar{\theta}_1} > 1$ . Entonces, un contrato en el que se ofrezca renta compartida simultáneamente a ambas tierras no es óptimo.

CASO II: No se ofrece contrato de renta compartida, es decir,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

(7) y (8) implican que  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ . Y de los alfas conocidos se

---

<sup>9</sup>Para mayores detalles referirse al apéndice.



tiene que  $\pi_1 \bar{\theta}_1 = \pi_2 \bar{\theta}_2$ . Esta última es la condición necesaria para que el contrato de renta fija sea el óptimo. Se puede interpretar como que si el riesgo o la productividad en ambas tierras es igual entonces se ofrecerá un contrato de renta fija.

CASO III: Hay contrato de renta compartida en tierra 1 pero no en 2,  $\alpha_1 < 1, \alpha_2 = 1$ .

Por (7) y (8) se sabe que  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ . Y dados los alfas conocidos tenemos que  $\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} < 1$  y  $\alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} = 1$ . De ellas se obtiene la condición necesaria para que exista contrato de renta compartida en la tierra 1,  $\pi_2 \bar{\theta}_2 < \pi_1 \bar{\theta}_1$ .

CASO IV: Es simétrico al CASO III. Cuando hay contrato de renta compartida en tierra 2 pero no en 1,  $\alpha_2 < 1, \alpha_1 = 1$ , se tiene que la condición necesaria es  $\pi_2 \bar{\theta}_2 > \pi_1 \bar{\theta}_1$ .

Note que en las condiciones de incentivos el agente sólo resuelve el problema de cuánto esfuerzo dedicar a ambas tierras, sin embargo, aún no ha decidido a cuál de las tierras le dedicará más esfuerzo. Esto se decidirá más adelante, cuando el agente observe los contratos, en especial, el  $\alpha$  de las 2 tierras. Resumiendo todos estos hallazgos en una proposición:

**Proposición 1.** *En presencia de restricción de liquidez ex-post y con el porcentaje de reparto restringido a estar entre 0 y 1 pero*

*con una función de costo de esfuerzo aditivamente no-separable que permita el efecto de sustitución de esfuerzo, un contrato de renta compartida es óptimo en la tierra  $i$ , siempre que  $\pi_j \bar{\theta}_j < \pi_i \bar{\theta}_i$  para  $i, j = 1, 2$  y  $i \neq j$ .*

Como se muestra en el CASO III,  $\frac{\pi_2 \bar{\theta}_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} < 1$  permite que exista un contrato de renta compartida en el terreno 1 ( $\alpha_1 < 1$ ) dado que esto implicaría que el terreno 1 es relativamente más productivo que el terreno 2 (o que al menos tiene mayor varianza), por lo que, en caso de éxito, el producto sería mayor. Así, el terreno 1 no necesita de incentivos para ser cultivado, mientras que el terreno 2, que tiene menor varianza, necesita que se le dé todo el incentivo para que el arrendatario produzca en él, por lo que el terrateniente maximiza dejando que el arrendatario se quede con toda la cosecha.

Entonces, la nueva forma de costos de esfuerzo (no-separable) implica que el arrendatario tiene un efecto de sustitución de esfuerzo (entre más esfuerzo y tiempo dedique para el terreno 1, menos esfuerzo le queda para el terreno 2), por lo que ahora el principal se ve obligado a crear el contrato adecuado para incentivar más esfuerzo en el terreno con menor varianza. Esto se resume más fácilmente en la Figura 1, que muestra las áreas de productivi-

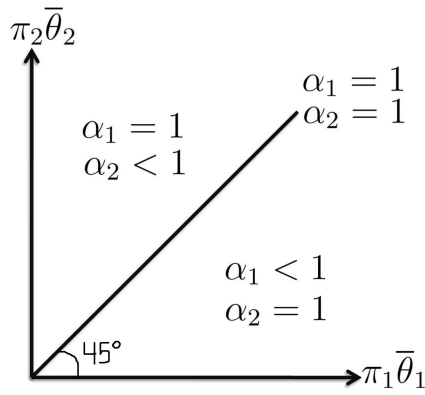


Figura 1: Renta compartida según productividad de la tierra  
 dad o riesgo de las tierras y sus respectivos porcentajes de reparto  
 óptimos. Se ilustrará el punto con un ejemplo:

**Ejemplo 1.** *Suponga que para la tierra 1 la probabilidad de tener éxito es alta pero que, sin embargo, en el improbable caso de fracaso el producto sería muy bajo. También suponga que para la tierra 2 es más improbable tener éxito, sin embargo, en caso de fracaso el producto no es tan bajo. Numéricamente se vería como  $\pi_1 = 0.5$ ,  $\theta_1 \in \{2, 20\}$  y  $\pi_2 = 0.1$ ,  $\theta_2 \in \{10, 20\}$ .*

*En este caso, se satisface la condición necesaria para que exista contrato de renta compartida en tierra 1,  $\pi_2 \bar{\theta}_2 = \frac{20}{10} = 2 < 10 = \frac{20}{2} = \pi_1 \bar{\theta}_1$  con  $\hat{\theta} = 11$ . Esto implica que  $\alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \theta_2} = 1$  y de ahí*

*se obtiene que  $e_1 + e_2 = 2$ . Así:*

$$\alpha_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} < 1 \text{ y } \alpha_2 = 1.$$

*Lo cual muestra que el principal le dará incentivos al agente para que cultive la tierra menos riesgosa (con menor varianza) con más esfuerzo que a la tierra más riesgosa.*

## 5. Conclusión

Antes se creía que era imposible que un contrato de renta compartida fuera óptimo si había restricciones de liquidez ex-post. Sin embargo, este documento ha demostrado que existen cuando el arrendatario trabaja más de 1 tierra y tiene un contrato diferente para cada una, dado que su esfuerzo dependa simultáneamente de ambas tierras y exista un *trade-off* en los esfuerzos. Fue demostrado que cuando no hay efecto de sustitución de esfuerzo el problema es equivalente a que el terrateniente contrate a 1 agente por tierra, es decir, es óptimo ofrecer renta fija. Y cuando hay efecto de sustitución de esfuerzo el contrato de renta compartida será óptimo. Así, este documento aborda el problema de una forma en la que no se había hecho antes y brindará la posibilidad de trabajar de nuevo con restricción de liquidez ex-post (que es un supuesto, posiblemente, más sencillo, creíble y realista que cualquiera de los otros tipos de restricción de liquidez) para análisis futuros sobre la estructura contractual en la agricultura.

## 6. Apéndice

### A. Costo de esfuerzo aditivamente separable

Las funciones de utilidad esperada están dadas como se especificó y el costo de esfuerzo es  $\psi(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)$ .

Ahora, de la optimización que realiza el agente, restricción de participación, tenemos que:

$$\max_{\{e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2, C\}} \left\{ E[Y_L | e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2, C] \right\}$$

$$e_1^* = \pi_1 \bar{\theta}_1 \alpha_1, \quad (9)$$

$$e_2^* = \pi_2 \bar{\theta}_2 \alpha_2. \quad (10)$$

Además, se puede demostrar que la restricción de participación se satura, y sustituyendo (9) y (10) tenemos que:

$$C = \frac{\pi_1^2 \alpha_1^2 \bar{\theta}_1^2 + \pi_2^2 \alpha_2^2 \bar{\theta}_2^2 - 2W}{2(\pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \pi_2)} + W. \quad (11)$$

Se sustituyen (11), (9) y (10) en  $E[Y_L]$  y se tiene que:

$$E[Y_L] = -\frac{\pi_1^2 \alpha_1^2 \bar{\theta}_1^2 + \pi_2^2 \alpha_2^2 \bar{\theta}_2^2}{2} + \pi_1 \alpha_1 \bar{\theta}_1 \hat{\theta} + \pi_2 \alpha_2 \bar{\theta}_2 \hat{\theta}. \quad (12)$$

Eso se maximiza sujeto a las restricciones de factibilidad. Se construye el Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\pi_1^2 \alpha_1^2 \bar{\theta}_1^2 + \pi_2^2 \alpha_2^2 \bar{\theta}_2^2}{2} + \pi_1 \alpha_1 \bar{\theta}_1 \hat{\theta} + \pi_2 \alpha_2 \bar{\theta}_2 \hat{\theta} \\ & + \mu_1 [1 - \alpha_1] + \mu_2 [1 - \alpha_2]. \end{aligned}$$

Y se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} = -\pi_1^2 \alpha_1 \bar{\theta}_1^2 + \pi_1 \bar{\theta}_1 \hat{\theta} - \mu_1 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} = -\pi_2^2 \alpha_2 \bar{\theta}_2^2 + \pi_2 \bar{\theta}_2 \hat{\theta} - \mu_2 = 0, \quad (14)$$

$$1 - \alpha_1 \geq 0, \mu_1 \geq 0 \text{ y } \mu_1(1 - \alpha_1) = 0, \quad (15)$$

$$1 - \alpha_2 \geq 0, \mu_2 \geq 0 \text{ y } \mu_2(1 - \alpha_2) = 0. \quad (16)$$

CASO I: Contrato de renta compartida en ambas tierras, es decir,  $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ .

(15) y (16) implican que:

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0.$$

De (13) tenemos que:

$$\alpha_1 = \frac{\pi_1 \bar{\theta}_1 \hat{\theta}}{\pi_1^2 \bar{\theta}_1^2} = \frac{\hat{\theta}}{\pi_1 \bar{\theta}_1} = 1 + \frac{(1 - \pi_1) \underline{\theta}_1}{\pi_1 \bar{\theta}_1} > 1.$$

Pero claramente eso es una contradicción.

CASO II: No existe contrato de renta compartida,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

(15) y (16) implican que:

$$\Rightarrow \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0.$$

Y de (13) y (14) se obtienen los valores de  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

$$\mu_1 = \pi_1 \bar{\theta}_1 (1 - \pi_1) \underline{\theta}_1 > 0,$$

$$\mu_2 = \pi_2 \bar{\theta}_2 (1 - \pi_2) \underline{\theta}_2 > 0.$$

CASO III: Hay contrato de renta compartida en tierra 1 pero no en 2,  $\alpha_1 < 1, \alpha_2 = 1$ .



Por (15) y (16) se sabe que:

$$\Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 > 0.$$

Sabiendo esto, de (13) tenemos que:

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\hat{\theta}}{\pi_1 \bar{\theta}_1} = 1 + \frac{(1 - \pi_1)\underline{\theta}_1}{\pi_1 \bar{\theta}_1} > 1.$$

Pero claramente eso es una contradicción.

CASO IV: Hay contrato de renta compartida en tierra 2 pero no en 1,  $\alpha_2 < 1, \alpha_1 = 1$ .

Por (15) y (16) se sabe que:

$$\Rightarrow \mu_2 = 0, \mu_1 > 0.$$

Sabiendo esto, de (13) tenemos que:

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\hat{\theta}}{\pi_2 \bar{\theta}_2} = 1 + \frac{(1 - \pi_2)\underline{\theta}_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} > 1.$$

Pero claramente eso es una contradicción.

## B. Costo de esfuerzo aditivamente no-separable

Las funciones de utilidad esperada es igual para el principal y sólo cambia en la forma del costo de esfuerzo  $\psi(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)^2$  para el agente.

Simplificando:

$$\begin{aligned} E[Y_L] &= [\pi_1 + \pi_2 - \pi_1\pi_2]C + (1 - \pi_1)(1 - \pi_2)W \\ &\quad + (1 - \pi_1)\underline{\theta}_1 e_1 + (1 - \pi_2)\underline{\theta}_2 e_2 \\ &\quad + \pi_1 e_1 \bar{\theta}_1 (1 - \alpha_1) + \pi_2 e_2 \bar{\theta}_2 (1 - \alpha_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y_T] &= \pi_1 e_1 \bar{\theta}_1 \alpha_1 + \pi_2 e_2 \bar{\theta}_2 \alpha_2 \\ &\quad - [\pi_1 + \pi_2 - \pi_1\pi_2]C \\ &\quad - (1 - \pi_1)(1 - \pi_2)W - \frac{(e_1 + e_2)^2}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, de la optimización que realiza el agente, restricción de participación, y sabiendo que la restricción de participación se

satura, tenemos que:

$$\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1}, \quad (17)$$

$$\alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2}, \quad (18)$$

$$C = \frac{(e_1 + e_2)^2 - 2W}{2(\pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \pi_2)} + W. \quad (19)$$

Sustituyendo (17), (18) y (19) en la utilidad esperada del principal se obtiene que:

$$E[Y_L] = (e_1 + e_2)\hat{\theta} - \frac{(e_1 + e_2)^2}{2}.$$

Se maximiza  $E[Y_L]$  sujeto a las 2 condiciones de factibilidad, de donde se obtiene el Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e_1, e_2) = & [e_1 + e_2]\hat{\theta} + \lambda_1[\pi_1 \bar{\theta}_1 - e_1 - e_2] \\ & + \lambda_2[\pi_2 \bar{\theta}_2 - e_1 - e_2] - \frac{(e_1 + e_2)^2}{2}. \end{aligned}$$

De ahí se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_1} = \hat{\theta} - e_1 - e_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_2} = \hat{\theta} - e_1 - e_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad (21)$$

$$\pi_1 \bar{\theta}_1 - e_1 - e_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0 \text{ y } \lambda_1 \left(1 - \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1}\right) = 0, \quad (22)$$

$$\pi_2 \bar{\theta}_2 - e_1 - e_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \text{ y } \lambda_2 \left(1 - \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2}\right) = 0. \quad (23)$$

CASO I: Contrato de renta compartida en ambas tierras, es decir,

$$\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1.$$

El  $\alpha$  es conocido:

$$\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} < 1, \alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} < 1.$$

Además, (22) y (23) implican que:

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

De (20) tenemos que:

$$\hat{\theta} = e_1 + e_2.$$

Entonces, se sustituye este último resultado en el  $\alpha$  conocido:

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi_1 \bar{\theta}_1 + (1 - \pi_1) \underline{\theta}_1}{\pi_1 \bar{\theta}_1} = 1 + \frac{(1 - \pi_1) \underline{\theta}_1}{\pi_1 \bar{\theta}_1} > 1.$$

Pero claramente eso es una contradicción.

CASO II: No existe contrato de renta compartida,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

(22) y (23) implican que:

$$\Rightarrow \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

Y el  $\alpha$  conocido implicaría que:

$$e_1 + e_2 = \pi_1 \bar{\theta}_1 = \pi_2 \bar{\theta}_2. \quad (24)$$

Y así se obtiene la condición para contratos de renta fija.

CASO III: Hay contrato de renta compartida en tierra 1 pero no en 2,  $\alpha_1 < 1, \alpha_2 = 1$ .

Por (22) y (23) se sabe que:

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0.$$

Y dados los alfas conocidos, tenemos que:

$$\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} < 1, \alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} = 1.$$

Despejando  $e_1 + e_2$  de  $\alpha_2$  tenemos que:

$$\Rightarrow e_1 + e_2 = \pi_2 \bar{\theta}_2.$$

Sustituyendo esto último en  $\alpha_1$ :

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi_2 \bar{\theta}_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} < 1.$$

Finalmente, se obtiene la condición:

$$\Rightarrow \pi_2 \bar{\theta}_2 < \pi_1 \bar{\theta}_1. \quad (25)$$

CASO IV: Hay contrato de renta compartida en tierra 2 pero no en 1,  $\alpha_2 < 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ . Por (22) y (23) se sabe que:

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0.$$

Y dados los alfas conocidos, tenemos que:

$$\alpha_1 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_1 \bar{\theta}_1} = 1, \alpha_2 = \frac{e_1 + e_2}{\pi_2 \bar{\theta}_2} < 1.$$

Despejando  $e_1 + e_2$  de  $\alpha_1$  tenemos que:

$$\Rightarrow e_1 + e_2 = \pi_1 \bar{\theta}_1.$$

Sustituyendo esto último en  $\alpha_2$ :

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi_1 \bar{\theta}_1}{\pi_2 \bar{\theta}_2} < 1.$$

Finalmente, se obtiene la condición:

$$\Rightarrow \pi_2 \bar{\theta}_2 > \pi_1 \bar{\theta}_1. \quad (26)$$

## Referencias

- [1] Pranab Bardhan (2004), *The Economic Theory of Agrarian Institutions*. Clarendon Press.
- [2] Pranab Bardhan y Christopher Udry (2000), *Readings in Development Economics*. The MIT Press, 1.
- [3] Kaushik Basu (1992), “Limited liability and the existence of share tenancy.” *Journal of Development Economics*, 38: 203-220.
- [4] S. Cheung (1969), *The Theory of Share Tenancy*. University of Chicago Press.
- [5] Mukesh Eswaran y Ashok Kotwal (1985), “A theory of contractual structure in agriculture.” *The American Economic Review*, 75 (3): 352-367.
- [6] M. Ghatak y P. Pandey (2000), “Contract choice in agriculture with joint moral hazard in effort and risk.” *Journal of Development Economics*, 63: 303-326.
- [7] Bengt Hölmstrom y Paul Milgrom (1991), “Multitask principals-agent analysis: incentive contracts, asset owners-



- hip, and job design.” *Journal of Law, Economics and Organization*, 7: 24-52.
- [8] J.-J. Laffont y M. Matoussi (1995), “Moral hazard, financial constraints and sharecropping in El Oulja.” *The Review of Economic Studies*, 62: 381-399.
- [9] Annalisa Luporini y Bruno Parigi (1996), “Multi-task sharecropping contracts: the Italian Mezzadria.” *Economica*, 63 (251): 445-457.
- [10] D. Newbery (1977), “Risk sharing, sharecropping and uncertain labour markets.” *The Review of Economic Studies*, 44: 585-594.
- [11] Tridip Ray (2005), “Sharecropping, land exploitation and land improving investments.” *Japanese Economic Review*, 56: 127-143.
- [12] Tridip Ray y Nirvikar Singh (2001), “Limited liability, contractual choice, and the tenancy ladder.” *Journal of Development Economics*, 66: 289-303.
- [13] Kunal Sengupta (1997), “Limited liability, moral hazard and share tenancy.” *Journal of Development Economics*, 52: 393-407.

- [14] Sudhir Shetty (1988), "Limited liability, wealth differences, and the tenancy ladder in agrarian economies." *Journal of Development Economics*, 29: 1-22.
- [15] Joseph Stiglitz (1974), "Incentives and risk sharing in sharecropping." *The Review of Economic Studies*, 95: 219-255.