NÚMERO 439

JOSÉ CARLOS RAMÍREZ Y LEOVARDO MATA

Un modelo de ecuaciones diferenciales con rezagos para simular el equilibrio maltusiano con oscilaciones

DICIEMBRE 2008

CIDE

www.cide.edu

Resumen

El documento desarrolla un modelo dinámico de población con rezagos para mostrar que un estudio completo de las ideas demográficas de Malthus requiere de hacer uso de análisis que contemplen oscilaciones alrededor de un atractor estable. La idea largamente aceptada por la teoría de crecimiento tradicional de que los equilibrios dinámicos maltusianos son suaves y únicos es una simplificación válida para algunas trayectorias de la tasa de crecimiento de la población, pero no para todas. Los resultados de la reciente experiencia demográfica de México sostienen que los equilibrios con salarios altos o bajos pueden ser alterados mediante la introducción de rezagos en las ecuaciones de crecimiento de la población y del ingreso.

Abstract

By presenting a population model with delay differential equations this paper aims at showing that a complete study of Malthus's demographic ideas requires to make use of dynamic analyses involving oscillations around a stable attractor. Acceptance of the fact that Malthusian dynamic equilibria are smooth and unique is a valid simplification for some but not all ranges of the population's growth rate. Results drawn from Mexico's recent demographic experience hold that, contrary to the traditional perception, the stationary equilibrium may be constantly altered by introducing delays in the growth equations of "Malthus ratios".

Introducción

No hay duda de que escribir sobre Malthus equivale, de alguna manera, a invocar a los demonios. Y es que si uno se atreve a revisar cualquier tema consagrado por los críticos o apologistas del autor es casi seguro que el esfuerzo termine en una disputa ideológica. Los escritos de Malthus, en concreto su famoso *Ensayo sobre el principio de población*,[1] tienen como denominación de origen el escándalo y la animosidad política y por eso nada que se escriba sobre ellos está libre de fanatismos. Así ha sido la historia del *Ensayo* desde su primera publicación en 1798 y, ante la creciente complejidad demográfica que comparten países de desigual desarrollo en un mundo cada vez más unificado, es muy probable que no haya cambios en el futuro inmediato. Hoy las ideas del *Ensayo* siguen polarizando las opiniones demográficas de la misma manera como lo hacían 200 años atrás, es decir inspirando con dogmas de fe a los conservadores (políticos derechistas y funcionarios de agencias internacionales) o sirviendo como objeto de escarnio a los liberales (las izquierdas de todos colores).

Pero las dificultades de emprender un nuevo análisis demográfico sobre Malthus no se reducen sólo a diferencias ideológicas. Hay, también, razones teóricas —en particular dos— que han contribuido a desvirtuar las ideas originales contenidas en los primeros dos capítulos del *Ensayo* y, como consecuencia, a arraigar falsas suposiciones sobre el pensamiento de Malthus. La primera de ellas es la pobre sistematización del principio de población en cualquiera de las seis ediciones del *Ensayo* revisadas en vida por el autor. De acuerdo con Tudela (1998) y Davis (1998) el *principio* es expuesto con tan poco rigor en el *Ensayo* que no es posible jerarquizar las variables al interior de un cuerpo teórico ni separar los razonamientos morales de los científicos.[2]

Las pruebas empíricas que Malthus ofrece en apoyo a la omnipresencia del *principio* en todo tipo de sociedades, y que lo llevan a escribir ocho capítulos (del III al X), son superfluas y sin validez probatoria, pues ante la ausencia de una teoría los ejemplos no confirman ni rechazan nada (Davis 1998, LIX). La exposición del *principio* es, más bien, enunciativa y con tintes prescriptivos porque, lejos de montar un estructura científica que explique la existencia del *principio*, Malthus se limita a enunciarlo como si fuera una verdad en sí y,

[1] El título completo del libro en su primera edición inglesa es *An Essay on the Principle of Population, as it Affects the Future of Society with Special Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, and other Writers*. Nosotros adoptaremos la práctica habitual de referirlo simplemente como *Ensayo*. Las citas que aparecen a lo largo del texto son tomadas de la segunda edición inglesa por considerar que ahí aparecen ya todas las respuestas más importantes de Malthus a sus críticos (Pingle 2003).

[2]Malthus enuncia el *principio* como la tendencia de toda *vida animada* a crecer más allá de sus disponibilidades alimenticias. Para tal efecto formula tres supuestos que son presentados como leyes fijas de nuestra naturaleza: 1) Los alimentos son indispensables para la existencia del hombre; 2) la pasión entre los sexos es inevitable; y 3) las potencialidades de crecimiento de la población son infinitamente superiores a las de los alimentos (Dooley 1988).

en los capítulos finales del *Ensayo*, a mostrar los peligros de favorecer políticas sociales (como la ley de pobres) que ignoren sus efectos. Como consecuencia, los críticos y seguidores han buscado tomar ventaja del tono informal del *Ensayo* al interpretar libremente el significado, funcionamiento y consecuencias del *principio*.

La segunda razón es la vinculación del *principio* con los mecanismos de equilibrio, primero, de la teoría del valor de Ricardo y, posteriormente, de los modelos económicos de *steady state*. En su teoría, Ricardo establece las mediaciones por las cuales las trayectorias de la población y la tasa de ganancia convergen al estado estacionario, usando el *principio* como fundamento de una de las leyes más importantes de su esquema conceptual: la ley de rendimientos decrecientes. Con esa ley, el *principio* adquirió, por primera vez, un estatus científico en la explicación del descenso secular de la tasa de ganancia hacia un estado estable a la vez que lo "hizo casi inexpugnable a la crítica" (Pasinetti 1978, 111). Pero también modificó su significado original. La inserción en la teoría ricardiana del valor dio al *principio* una visión estable que no tiene sustento fiel en el *Ensayo*. La utilización casi automática que Ricardo hace del *principio* como mecanismo de estabilización de la ganancia a largo plazo es, sin duda, un resultado consistente con una parte del *Ensayo* pero no con otras. Y éste no es un asunto menor.

El destino posterior del *principio* siguió un camino diferente en los modelos de demanda agregada y neoclásicos, pues pasó de ser un elemento determinante de la oferta (regulador de salarios) a otro de la demanda (regulador de las funciones de utilidad agregadas en el consumo), de reinar en los ámbitos macroeconómicos (equilibrios generales) a los microeconómicos (equilibrios en la economía del hogar) y de ser medido por cantidades (tasas de crecimiento) a calidades (diferentes clases de capital humano).[3] En cada caso el *principio* adquirió un estatus diferente en el análisis económico a tal grado que hoy en día no es nada fácil reconocer su significado original. En los modelos de generaciones sobrepuestas, por ejemplo, el *principio* sólo es inteligible en el mundo de las decisiones familiares. Los criterios de optimización del bienestar de una familia sujetos a los criterios de algunos precios sombra (como el costo del tiempo de los padres o las condiciones de salud y laboral de la madre) han pasado a sustituir la mecánica de ajuste macroeconómico de la población a los medios de subsistencia, ingreso bruto o

[3] Para una mayor información sobre estas modificaciones conceptuales del *principio* véase Ramírez y Morelos (2002). Cabe aclarar que después de analizar los efectos de los controles sobre el crecimiento ilimitado de la población, Malthus parece redefinir al *principio* como el mecanismo regulador que direcciona los movimientos de las tasas de crecimiento de la población y de los medios de subsistencia hacia el estado estacionario (equilibrio con salarios de subsistencia bajos). La regulación está mediada por una intrincada red de factores económicos, demográficos, culturales y sociales que puede retardar o acelerar la convergencia de las dos tasas. En los modelos posteriores ese mecanismo es modificado de tal suerte que los equilibrios *óptimos* de las dos tasas en economías desarrolladas pueden darse, incluso, en escenarios de salarios de subsistencia altos (Wrigley 1986).

demanda agregada. Nada que no se decida en las unidades familiares puede ser de utilidad para evaluar los efectos de la población en el crecimiento económico y viceversa.

Las modificaciones no han alterado, sin embargo, los conceptos de estabilidad y convergencia a un atractor legados por Ricardo.[4] La herencia de esos conceptos por los nuevos modelos de crecimiento (tanto exógenos como endógenos) ha llevado a perpetuar la verdad a medias de que en el *Ensayo* hay un piso de subsistencia estable y único, sin diferencias de patrones demográficos por clases sociales ni conductas heterogéneas entre la población.

El objetivo del documento es mostrar que el estado estacionario lejos de ser el destino forzoso de todas las posibles trayectorias de las tasas de crecimiento de la población y de los medios de subsistencia es tan sólo un concepto límite en el análisis maltusiano de largo plazo. Los resultados aquí discutidos sostienen, al igual que otros autores (véase Goodwin 1978 y Waterman 1987), que las fluctuaciones en las trayectorias de las tasas pueden retardar su convergencia al atractor estable y, como consecuencia, alterar las condiciones de equilibrio previstas. La importancia de destacar las causas que explican las fluctuaciones es, pues, esencial para tener una idea más acabada de la dinámica demográfica en el pensamiento de Malthus. Pero aquí hay que aclarar rápidamente que esa idea no está orientada a hacer una exégesis del *Ensayo* sino, más bien, a tener un conocimiento razonable de las implicaciones prácticas del *principio*. Las simulaciones basadas en la reciente experiencia mexicana revelan, en efecto, que el análisis de la naturaleza de esas fluctuaciones puede constituir un poderoso auxiliar en la comprensión de los pronósticos de población.

El documento se divide en dos apartados. En el primero se discuten los dos principales problemas que enfrenta un investigador cuando intenta formalizar el *principio* de Malthus. La idea es llamar la atención sobre un hecho poco discutido en la literatura y que, en cierto sentido, representa el primer demonio desatado entre los investigadores cuando se construye un modelo maltusiano: la polaridad de puntos de vista sobre el *Ensayo*. En el segundo apartado se expone un modelo dinámico en el que se incluyen las oscilaciones en torno al equilibrio estacionario utilizando una ecuación diferencial con rezagos. Para ilustrar los resultados de este último modelo desarrollamos una simulación basada en la reciente experiencia demográfica mexicana. Las conclusiones resaltan, finalmente, la importancia de incorporar el estudio de

[4] Entre las modificaciones más significativas destacan las causas del sobrepoblamiento relativo y el signo de la relación entre el crecimiento de los medios de subsistencia (o ingresos) y el crecimiento de la población. Mientras que para Malthus y Ricardo el sobrepoblamiento relativo se explica por factores macroeconómicos que determinan las diferencias de crecimiento entre la población y los medios de subsistencia, para los modelos neoclásicos el asunto no es más que una externalidad negativa derivada de una decisión familiar. Del mismo modo, mientras que en los dos autores la relación entre las dos tasas es positiva, para los neoclásicos la relación es negativa debido a que a mayores niveles de ingreso es dable esperar menores niveles de crecimiento poblacional.

las oscilaciones en los modelos de crecimiento para tener una idea más clara de los efectos del *principio* en el tratamiento de problemas demo-económicos actuales.

1. Los problemas en la formulación de un modelo maltusiano

En el *Ensayo*, Malthus (1998) describe la carrera entre la producción de alimentos y la cantidad de humanos que hay que alimentar con base en un arreglo numérico nada proporcional; es decir, mientras la primera crece aritméticamente la segunda lo hace, en ausencia de controles, en forma geométrica. Y así cualquier sociedad, agrega Malthus, está condenada a vivir al nivel de subsistencia.[5]

La dinámica del *principio* supone que los movimientos de la población dependen críticamente de los medios de subsistencias, ya sea que estos últimos estén determinados por razones biológicas (nivel absoluto) y/o sociales (nivel relativo). La manera en que podemos observar esto es partiendo de un estado inicial. Consideremos, por ejemplo, que por efecto de una inversión adicional en la agricultura —la actividad productiva relevante en el *Ensayo*— sea posible contratar a más trabajadores a un salario per cápita, w, superior a los medios de subsistencia *per cápita*, s. El incremento resultante en el estándar de vida de esos trabajadores favorecerá su crecimiento exponencial hasta el punto en que diversos factores, entre ellos la ley de rendimientos decrecientes operante en la agricultura, pongan freno a su expansión. En concreto, los mayores precios de los alimentos derivados de la menor productividad del trabajo en las tierras menos feraces, reducirán el salario real per cápita (además de aumentar la renta de las tierras y disminuir la tasa de ganancia) y, en consecuencia, los incentivos de los asalariados para seguir reproduciéndose sin control. Con el avance de la acumulación de capitales en tierras menos fértiles, la situación de la clase trabajadora se hará cada vez más desesperante al extremo de obligarla a frenar su crecimiento mediante diversos controles natales (como la abstinencia o la postergación de la edad al matrimonio). Estos frenos preventivos terminarán de completar la tarea iniciada por los frenos positivos (guerras, epidemias o hambrunas) hasta el punto en que $w = s$ y la tasa de natalidad sea igual a la de mortalidad. La población crecerá, entonces, en forma estacionaria y bajo completo control.

[5] La población es mantenida al nivel de subsistencia por la acción de los controles o frenos preventivos y positivos que operan constantemente en cualquier sociedad con mayor o menor fuerza. Los primeros frenos están relacionados con el control natal (postergación de la edad al matrimonio o abstinencia sexual) y los segundos con diversos factores que acortan la duración de la vida (exposición a trabajos peligrosos, malnutrición de la niñez, epidemias, guerras o hambrunas). La eficacia de ambos controles varía inversamente con el nivel de desarrollo de la sociedad. Entre mayor sea este nivel menor es el poder correctivo de los frenos positivos y mayor el de los preventivos. La situación se invierte en las sociedades atrasadas. Los dos tipos de controles pueden ser entendidos, también, como resultantes de la restricción moral, vicio y miseria" (Malthus 1998,15).

Los vaivenes de la población no cesarán, sin embargo, en ese punto ya que aún es posible esperar que ocurran movimientos retrógrados y progresivos en torno al nivel de subsistencia. Una caída generalizada en w previo al estado estacionario podría, por ejemplo, alentar a los inversionistas a contratar a un contingente adicional de trabajadores a un menor costo y, en consecuencia, a retardar la caída secular de la tasa de ganancia. Del mismo modo, un alza temporal en w podría reducir el fondo de salarios y revertir la tendencia creciente de la población y la acumulación. Las oscilaciones surgirían como resultado de los rezagos en los ajustes de la población a los movimientos de w y de los capitalistas a las variaciones en la tasa de ganancia (Dooley 1988). La intensidad y duración de las oscilaciones dependerán de la acción conjunta de muchos factores, más adelante explicados, no necesariamente económicos.

¿Cómo se formaliza un esquema conceptual con estas características? La respuesta lejos de ser sencilla es polémica. Y es que si bien la mayoría de los autores reconoce que el esquema es un prototipo de los modelos dinámicos de equilibrios estables y únicos, no existe mucho consenso entre ellos sobre la manera de traducir los conceptos económicos a un cuerpo definido de herramientas matemáticas. En general podemos distinguir dos grandes temas en los que los autores disienten al momento de formalizar las ideas del *Ensayo*: (a) la modelación de las tasas de crecimiento; y (b) las condiciones de estabilidad y convergencia de los atractores.

1.1. Los desacuerdos sobre las tasas de crecimiento

En lo que respecta al primer tema, las diferencias comienzan con la forma de traducir matemáticamente el *principio*. Hay, por un lado, autores que utilizan ecuaciones unidimensionales para interpretar analíticamente su equilibrio y, por otro lado, autores que echan mano de los sistemas de ecuaciones diferenciales para dar soluciones cualitativas a su dinámica. Los primeros incorporan modelos lineales que buscan apegarse lo más posible al contenido de los dos primeros capítulos del *Ensayo* (Waterman 1987, 1998 y Samuelson 1978); mientras que los segundos usan modelos no lineales pero sin seguir puntualmente los análisis canónicos de Malthus (Goodwin 1978).[6] El resultado es una miríada de formalizaciones del *principio* que no necesariamente es homogénea.

El ejemplo más ilustrativo de esta diversidad de formulaciones lo constituye, sin duda, la modelación de las tasas de crecimiento. Para aclarar este punto consideremos el sistema de reproducción de las especies propuesto originalmente por Lotka (1973):

[6] Entre ambos extremos se ubican trabajos como el de Pingle (2003) en los que se utilizan categorías neoclásicas para reinterpretar los análisis más tradicionales elaborados, por ejemplo, por Waterman (1987).

$$dm_i/dt = F(m_1, m_2, \ldots, P, Q),\ (i = 1, 2, \ldots, n);\ (1)$$

donde m_i son las masas de las especies y P y Q los parámetros que denotan, respectivamente, la naturaleza de las distintas especies y el conjunto de sus condiciones externas, tales como el clima o los rasgos topográficos de su entorno (Lotka 1973). Cuando $m = 1$ el sistema se reduce a una ecuación diferencial no lineal que expresa los componentes de la expansión de una especie que crece sin interferencia de otras especies:

$$\frac{dG(t)}{dt} = a_0 + a_1G(t) + a_2G^2(t) + \ldots + a_nG^n(t)\ (2)$$

Ahora bien si suponemos como Malthus que las subsistencias crecen aritméticamente entonces la serie de Taylor (2) se transforma en

$$\frac{dS(t)}{dt} = a_0\ (3)$$

$$S(t) = a_0t + S_0\ (3.1)$$

donde $G(t) \equiv S(t)$ son las subsistencias medidas en unidades de algún alimento en el momento $t\ (t = 1, 2, \ldots, n)$; $a_0 = 1$ y $S(0) = S_0$.[7] Del mismo modo si nos atenemos a la serie geométrica de la población $(P(t))$ presentada en el *Ensayo*, entonces (2) debe arreglarse de tal suerte que es necesario desaparecer a_0 y todos los términos superiores a uno en $G(t) \equiv P(t)$:[8]

$$\frac{dP(t)}{dt} = a_1P(t)\ (4)$$

$$P(t) = P_0e^{a_1t}\ (4.1)$$

[7] En (3) desaparecen todos los coeficientes distintos de a_0 porque no hay otra manera de satisfacer la regla numérica de Malthus sobre el crecimiento de las subsistencias.

[8] En poblaciones humanas y animales $a_0 = 0$ porque debe haber al menos una hembra para crear una población (Lotka 1969,54).

para así obtener la llamada *Ley de Malthus* (ecuación 4.1) en la que a_1 es la tasa reproductiva.

Hasta aquí no hay mayor dificultad en la interpretación matemática de las tasas, pues las ecuaciones (3.1) y (4.1) reflejan muy bien las progresiones descritas por Malthus para la población (2, 4, 16, 256…) y los medios de subsistencia (1, 2, 3,4,…) Los problemas surgen cuando incorporamos los controles o la ley de rendimientos decrecientes en el análisis dinámico ¿Es posible esperar el mismo patrón de crecimiento de la población ante la presencia de controles? ¿Hay cambios en la progresión de las subsistencias con la introducción de rendimientos decrecientes en la agricultura?

Waterman (1998, 575) responde que la estructura de las ecuaciones debe permanecer inalterada durante el proceso de acumulación y que lo único que puede cambiar son los valores de los argumentos de las funciones que definen a las dos tasas de crecimiento. En concreto sostiene que si definimos a $gP(t) = a_1(w-s)$ como la tasa de crecimiento de la población, entonces la escala de $gP(t)$, no su forma de crecimiento, deberá ser ajustada de tal manera que crezca más y con menores controles cuando $w > s$ que cuando $w = s$, pues en este ultimo caso la población se encontrará completamente bajo la acción correctiva de los controles.[9] Del mismo modo si queremos adaptar una ecuación del tipo (3.1) a una situación donde opera la ley de rendimientos decrecientes basta introducir una función de producción que incluya a la tierra y a unas dosis de trabajo como capital para resolver el problema. De esta manera "si dosis sucesivas del factor compuesto son aplicadas al vector o perfil de tierra a una tasa geométricamente creciente, entonces el producto crecerá solo aritméticamente" (Waterman 1987, 261).

La decisión de dejar sin cambios a las ecuaciones de crecimiento se basa en el hecho, según el autor, de que Malthus expone las tasas con tal rigor matemático que una es presentada como condición de la otra o, puesto en términos más llanos, que la tasa de subsistencias es aritmética si y sólo si la de la población es geométrica (Waterman 1987, 260). De aquí que no haya necesidad de tratarlas por separado o de alterarlas en el análisis dinámico: su interdependencia es parte de una misma unidad matemática que Malthus fundamenta en los teoremas de proporciones.

Pingle (2003) y Hartwick (1988) disienten de este punto de vista al hacer eco de la duda manifestada por Stigler (1952, 190) sobre la validez de tomar literalmente las progresiones maltusianas de la población y los medios de subsistencias. Consideran, contrario a Waterman, que es muy pobre la evidencia ofrecida por Malthus para justificar las dos progresiones y que, por

---

[9] Esta ecuación es de la misma naturaleza que (4.1) pues g es el operador de la primera derivada logarítmica de la función $P(t)$. La única diferencia es que en esta versión $a_1 > 0$ ya no es la tasa de nacimientos per capita que crece a ritmos constantes, sino que ahora se expande o contrae dependiendo de la diferencia existente entre w y s.

lo tanto, no es necesario tomar a pie juntillas la descripción de las dos tasas en el *Ensayo*. En particular Hartwick (1988) asegura que mientras Malthus asigna la tasa geométrica al crecimiento de la población por ser una práctica extendida en su tiempo, formula arbitrariamente la tasa aritmética de las subsistencias con el único fin de conferirle un ropaje científico a las dos progresiones. Por esa razón, concluyen los autores, basta con que la población crezca a una tasa mayor que los medios de subsistencia para justificar adecuadamente el *principio*.

La actitud más liberal promovida por estos autores ha dado pie a nuevas formulaciones matemáticas sobre el principio y, con ello, a otras dos extensiones. La primera extensión incorpora el componente cuadrático de (2), con $a_2 < 0$, con el propósito de darle mayor realismo a (4.1) que crece sin controles ni limitaciones de "carga". La ecuación resultante es la logística o ecuación de Verhulst: [10]

$$\frac{dP(t)}{dt} = a_1P(t) - a_2P(t)^2 \quad (5)$$

$$P(t) = \frac{a_1P_0/(a_1 - a_2P_0)}{[a_2P_0/(a_1 - a_2P_0)] + e^{-a_1t}} \quad (5.1)$$

donde $P(0) = P_0$ es la población inicial y a_1 y a_2 son constantes que representan, respectivamente, las tasas medias de natalidad y mortalidad.

La otra extensión es un caso especial de (1) que genera, cuando $m = 2$, los modelos del tipo Lotka-Volterra. Un ejemplo de estos modelos lo constituye el sistema (6) en el que la población $P(t)$ es supuesta como depredador y las subsistencias $S(t)$ como presa.

$$\begin{aligned} dP(t)/dt &= rS(t)P(t) - RP(t) \\ dS(t)/dt &= \gamma S(t) - bS(t)P(t) \end{aligned} \quad (6)$$

De acuerdo con (6) mientras la población crece a un ritmo r y decrece a otro R por efecto de la presencia y ausencia de las subsistencias,

[10] Los límites de (5.1) están fijados por $a_1/a_2 = K$ cuando $t \to +\infty$ y por 0 cuando $t \to -\infty$ que dan la consabida forma de S a la curva de Verhulst. K es la carga del sistema y $a_1/2a_2$ es la cota mínima de individuos que garantiza el reemplazo de la población. El nivel de esta cota es variable y depende del tipo de especie bajo consideración. Otros estudios, especialmente hechos por ecólogos y biólogos, han desarrollado modelos que incluyen un término cúbico en la ecuación (2) para representar los efectos de la contaminación y otros elementos ambientales sobre el crecimiento poblacional de las especies (véase Kuang 1993).

respectivamente, $S(t)$ se expande a una tasa espontánea γ a la vez que se agota con un factor de decaimiento b cuando se incrementa $P(t)$. Las modalidades que puede tomar (6) son muy variadas y comprenden desde variantes que distinguen entre recursos renovables y no renovables hasta sistemas que establecen diferencias entre usos de suelos (Goodwin 1978 y Bonneuil 1994).

La introducción de ambas extensiones ha revitalizado la discusión sobre el carácter lineal de las ecuaciones de crecimiento de Malthus y, como veremos más adelante, de su estabilidad y convergencia al estado estacionario. Quienes defienden el uso de (5) y (6) en los modelos maltusianos (véase Goodwin 1978 y Ramírez y Juárez 2009) argumentan que su naturaleza no lineal es más adecuada para explicar las fluctuaciones y rezagos observables entre las variables demográficas y económicas que las ecuaciones (3) y (4). Las razones, según los autores, obedecen, por un lado, al hecho de que la dinámica del *principio* es mejor capturada por sistemas del tipo (6) que reflejen el carácter interdependiente y recíproco de las tasas de crecimiento y, por otro lado, a las diversas ventajas analíticas de (5) sobre (4) que ya han sido ampliamente citadas en la literatura económica, demográfica y biológica (véase Liz 2006).

Entre las ventajas destacan la mayor generalidad y adaptabilidad de la ecuación logística al análisis maltusiano. En efecto, ya que el rango de (4) es un subconjunto de (5) durante el periodo en que la población se expande sin control, la ecuación logística incluye, como un caso particular, la progresión geométrica enunciada por Malthus. Pero a diferencia de (4), la ecuación (5) permite observar, además, comportamientos más complejos señalados por Malthus, sobre todo cuando se relacionan diferentes fases del crecimiento poblacional con los medios de subsistencia y los controles a través de sus dos componentes. Por ejemplo si se considera a $a_1P(t)$ como una función positiva de los medios de subsistencia y una función negativa de los frenos preventivos, entonces es posible entender por qué cualquier impulso inicial de la población debido a un incremento en los medios de subsistencia puede ser contrarrestado por la acción de los frenos preventivos a medida que el sistema se acerca a K. De igual manera, si se piensa en el segundo componente $-a_2P(t)^2$ -como una expresión de los frenos positivos quedará claro ahora la mayor importancia que cobra ese factor de inhibición entre más altos sean los volúmenes de población o más cercanos sean los niveles de K. La posibilidad de sustituir a K por una función de producción que incorpore rendimientos decrecientes o de asociar la tasa de mortalidad a una ecuación de salarios, hace todavía más grandes las ventajas de expresar en una sola ecuación variables del análisis maltusiano que no se tienen cuando se toman por separado (3) y (4).

No obstante estas ventajas y que los estudios derivados de las dos extensiones han venido a renovar el análisis de la relación entre las tasas de Malthus, sus aportaciones han sido sometidas a una persistente crítica. Blanchet (1998, 142), por mencionar a uno de los más conspicuos críticos, sostiene que lejos de constituir un nuevo paradigma no-determinista, los modelos que se basan en (6) y (5) son una nueva manifestación de ultra-determinismo. En concreto menciona que las pretendidas inestabilidades en torno al equilibrio maltusiano propuestas por sus estudios se basan en supuestos muy restrictivos y poco realistas, que presuponen los resultados. Sobre esto volveremos en el siguiente punto.

1.2. Los desacuerdos sobre la estabilidad y convergencia de los atractores

El segundo gran tema de discusión está relacionado con la estabilidad y convergencia del equilibrio maltusiano. De un lado encontramos los estudios canónicos que privilegian los atractores estables y únicos (Samuelson 1978, Waterman 1988 y Pingle 2003) con trayectorias que experimentan fluctuaciones temporales (Waterman 1987, Eltis 1984 y Wrigley 1986) y, de otro lado, tenemos las investigaciones basadas en (5) y (6) que arrojan, además de equilibrios globales estables, catástrofes (Goodwin 1978), bifurcaciones y caos (Day 1983 y Praskawetz y Feichteinger 1995).

El primer grupo basa sus conclusiones en el análisis dinámico de una "función agregada de producción con tierra escasa", que incluye como argumentos al crecimiento geométrico de la población y a la función técnica de producción de la tierra. Las estrictas condiciones impuestas a las ecuaciones (linealidad, derivadas negativas entre la función agregada y la población o rendimientos decrecientes en la agricultura) dan como resultado análisis de dinámica *transicional* hacia el estado estacionario bien comportados. Las eventuales oscilaciones en torno a ese estado son vistas como desajustes temporales que se representan como trayectorias en zig-zag de los salarios reales (Waterman 1987, 265).

El segundo grupo, en cambio, supone relaciones no lineales entre la población y los medios de subsistencia que producen dinámicas *transicionales* más abruptas. El uso de sistemas como (6), por ejemplo, en los que los medios de subsistencia son considerados recursos no renovables, permite observar cambios de estabilidad (expresados en catástrofes) con sólo modificar el parámetro de natalidad (Goodwin 1978, 193), o trayectorias cíclicas alrededor de los puntos estacionarios $P^* = \gamma / b$ y $P^* = R / r$ (Blanchet 1998, 140). Asimismo la aplicación de la versión discreta de (5) en modelos que relacionan el tamaño de la población con el producto total puede generar caos en el sistema si un pequeño cambio en la intensidad del capital es capaz de generar saltos gigantescos de más del 60 % en la tasa de crecimiento anual de la población (véase Day 1983).

Las conclusiones en ambos casos son diametralmente opuestas. Mientras que para el primer grupo la convergencia y estabilidad en torno al estado estacionario es la solución general e inevitable del *Ensayo*, para el segundo es un caso especial que se cumple bajo condiciones idealizadas. Las oscilaciones no son, para autores como Day (1983) y Praskawetz y Feichteinger (1995), meros desajustes temporales como lo menciona Waterman, sino resultado de un sistema altamente inestable previsto por Malthus. Lo que está en discusión no es, pues, el uso de ciertas ecuaciones sino el contenido de la interpretación dinámica del *principio*.

El problema es que no basta con tener buenas intenciones, sino hay que demostrarlas. Y en eso, como lo menciona Blanchet (1998, 148), algunos autores del segundo grupo parecen fallar, pues sus conclusiones se basan en dos supuestos que son casi imposibles de cumplir; a saber: una muy alta sensibilidad del ingreso al tamaño de la población y una muy alta sensibilidad del crecimiento de la población a los cambios en el nivel de vida. Por esa razón, continua Blanchet, la demostración de equilibrios inestables es un resultado forzoso que tiene que ver más con la dinámica caótica de las ecuaciones logísticas discretas (observada para ciertos rangos de la tasa de crecimiento) que con el planteamiento teórico de los autores. La inestabilidad del equilibrio maltusiano es, en estas condiciones, una petición de principio.

2. Hacia una nueva interpretación del principio: equilibrios con oscilaciones

2.1. La dinámica del principio con K(t) expresada como función de P(t)

Para lograr una interpretación comprehensiva de la dinámica del *principio* es necesario construir un modelo que presente al estado estacionario como un caso límite pero que, en el ínterin, contemple el espectro de trayectorias consideradas por Malthus en el *Ensayo* como oscilaciones.[11] El primer paso en esa dirección consiste en adoptar la siguiente versión del sistema (1) en la que: i) las subsistencias son fijadas *socialmente* por una función de producción $K(t)$ que depende de la fuerza de trabajo $P(t)$, el progreso tecnológico $A > 0$ y el parámetro de los rendimientos marginales decrecientes de $P(t)$,

[11] En el capítulo II de su *Ensayo* Malthus se refiere a las oscilaciones como los movimientos retrógrados y progresivos que experimenta el bienestar de la población alrededor del "piso de subsistencia". La duración y amplitud de esas oscilaciones varía en cada sociedad de acuerdo con las condiciones económicas de las diferentes clases sociales, la efectividad de las causas interruptoras del crecimiento de la población (tales como: la introducción o fracaso de ciertas manufacturas, el mayor o menor grado de iniciativa de las empresas agrícolas, los años de abundancia o escasez, las guerras y las epidemias, entre otras) y, en especial, la diferencia entre el precio nominal y el precio real del trabajo. Huelga decir que esas oscilaciones vienen asociadas con diversas tasas de crecimiento de la población.

$0<\alpha<1$;[12] y ii) la población crece logísticamente como una función inversa del recíproco del producto *per cápita* de la economía $K(t)/P(t)$, expandido por una constante s:[13]

$$\frac{dP(t)}{dt}=r_0P(t)\left[1-s\frac{P(t)}{K(t)}\right] \quad (5)$$
$$K(t)=AP(t)^{\alpha}$$

El segundo paso consiste en reducir (5) a una sola ecuación que exprese el crecimiento de la población en términos del producto *per cápita*. Para tal efecto consideraremos que $x(t)=K(t)/P(t)=AP(t)^{\alpha-1}$ crece de acuerdo con la ecuación diferencial:

$$x'(t)=A(\alpha-1)P(t)^{\alpha-2}P'(t)=(\alpha-1)x(t)\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (6)$$

Tras separar variables y sustituir $x(t)$ y la primera ecuación de (5) en (6) tenemos que:

$$\frac{x'(t)}{(\alpha-1)x(t)}=r_0\left(1-\frac{s}{x(t)}\right) \quad (7)$$
$$x'(t)-r_0(\alpha-1)x(t)=-r_0s(\alpha-1) \quad (8)$$

cuyo resultado produce finalmente la trayectoria del producto *per cápita*

$$x(t)=[x_0-s]e^{r_0(\alpha-1)t}+s \quad (9)$$

o expresado en términos de tasas de natalidad a y mortalidad b, con $a=r_0$ y $b=r_0s$

$$x(t)=\left[x_0-\frac{b}{a}\right]e^{a(\alpha-1)t}+\left(\frac{b}{a}\right) \quad (10)$$

[12] Esta es una función estándar propuesta por Stigler (1952) y más adelante usada por autores como Pingle (2003).
[13] De acuerdo con este supuesto un producto medio elevado puede soportar altas tasas de crecimiento poblacional. La constante s puede considerarse también como el límite inferior de los medios de subsistencia *per cápita*.

De esta manera si introducimos (9) o (10) en nuestra definición de $x(t) = AP(t)^{\alpha-1}$ y resolvemos para $P(t)$ tendremos, finalmente, la ecuación de la población buscada:

$$P(t) = \left(\frac{x(t)}{A}\right)^{1/(\alpha-1)} \quad (11)$$

La observación detenida de (11) muestra que la trayectoria de la población convergerá a un escalar definido por las tasas de natalidad y mortalidad y la constante tecnológica; esto es:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_e = \left(\frac{s}{A}\right)^{1/(\alpha-1)} \quad (12)$$

debido a que $\lim_{t\to\infty} x(t) = s$ y $s = b/a$. Del mismo modo, si sustituimos (11) en la función de producción y aplicamos límites, encontraremos que el atractor de $K(t)$ está regulado por las mismas constantes que $P(t)$

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = K_e(t) = A\left(\frac{s}{A}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \quad (13)$$

La convergencia de (12) y (13) será más pronunciada entre más pequeño sea el valor de α o mayor sea la importancia de los rendimientos decrecientes en la agricultura. En el caso límite, las tasas instantáneas de todas las variables serán nulas, esto es:[14]

$$\lim_{t\to\infty} P'(t)/P(t) = \lim_{t\to\infty} K'(t)/K(t) = \lim_{t\to\infty} x'(t)/x(t) = 0 \quad (14)$$

La influencia de los salarios *per cápita* en este proceso puede ser vista a través de la relación de s con la tasa de mortalidad. Si suponemos, como es

[14] La relación entre los límites de las tasas instantáneas de la población y el producto queda más clara si expresamos a $K(t)$, primero, en términos logarítmicos y, luego, derivamos la ecuación. El resultado es $\alpha P'(t)/P(t) = K'(t)/K(t)$, donde se puede constatar que a medida que α se aproxime a cero ambas tasas instantáneas serán nulas. La razón obedece a que con rendimientos decrecientes la producción crecerá a un ritmo menor que la población, provocando una caída permanente en el producto *per cápita*. La pérdida de bienestar resultante desacelerá, a su vez, el crecimiento demográfico y de la producción hasta el punto en que $x(t)$ deje de crecer o converja al estado estacionario.

práctica habitual, que la tasa media de mortalidad es una función inversa de los salarios per cápita w, y que $b = r_0 s$ entonces

$$s = f(w) \quad (15)$$

donde $w = \alpha A P^{\alpha - 1} = \alpha x(t)$ es el producto marginal del trabajo.

Ahora bien ya que $\frac{ds}{dw} < 0$ y $\frac{dP_e(t)}{dw} = \frac{dP_e(t)}{ds}\frac{ds}{dw}$, entonces podemos apreciar que hay una relación positiva entre $P(t)$ y w

$$\frac{dP_e(t)}{dw} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1}\frac{ds}{dw} > 0 \quad (16)$$

La relación entre las dos variables no es, sin embargo, proporcional pues está mediada por el parámetro α, de tal suerte que una disminución en s debido a una caída en w puede redundar en una caída aún mayor en $P(t)$ por efecto del término de inhibición $-bP(t)^2$ entre más pequeño sea el valor de α. Y como esto es también válido para $K(t)$, entonces una variación en w acompañada de valores bajos de α tenderá a influir más que proporcionalmente en los cambios experimentados por los medios de subsistencia y la población.

2.2. La ecuación logística con rezagos y la existencia de oscilaciones

Hasta aquí el análisis dinámico del *principio* expresado por las ecuaciones (5) - (16) predice, con diferentes herramientas, los mismos resultados que el sistema (1). Sin embargo, ninguno de los dos modelos dice mucho acerca del comportamiento de las variables antes de alcanzar el estado estacionario. Por este motivo, y como último paso, introduciremos rezagos en las variables para determinar su capacidad de respuesta de una manera más realista. En particular supondremos que la tasa de crecimiento poblacional no se ve afectada por la tasa de natalidad de manera instantánea, sino que existe un periodo de retraso durante el cual $P(t - \tau)$ influye sobre $P(t)$ a través de las tasas medias de natalidad y mortalidad. De esta manera el efecto no lineal generado por las fluctuaciones de los medios de subsistencia se puede capturar directamente en la variable $P(t)$ mediante un rezago τ en el término de inhibición de la ecuación logística (véase Kuang 1993 y Liz 2006):

$$\frac{dP(t)}{dt} = r_0 P(t)\left[1 - s\frac{P(t-\tau)}{K(t)}\right] \quad (17)$$
$$K(t) = AP(t)^{\alpha}$$

La fijación de la longitud del rezago τ es arbitraria y su estimación puede tener diferentes implicaciones para cada una de las fases de la transición demográfica de una población. Debido a esto es importante no adelantar ningún valor de τ sin antes conocer la situación demográfica concreta de una sociedad, aun cuando algunos autores sugieran un periodo de veinticinco años para atender la propuesta hecha por Malthus en el *Ensayo* (véase, por ejemplo, Waterman 1987). En cualquier caso es sabido que la primera ecuación de (17) converge a un punto fijo estable cuando $r_0\tau < \pi/2$ (Kuang 1993), por lo que es posible asegurar que en ese intervalo existe un valor límite P_e en el largo plazo en el que $\lim_{t\to\infty}\frac{P'(t)}{P(t)} = 0$ y $\lim_{t\to\infty}P(t) = \lim_{t\to\infty}P(t-\tau) = P_e$ ¿Cuál es ese valor límite? Para derivarlo consideremos el límite de la ecuación logística una vez incluida la función $K(t)$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(r_0 P(t)\left[1 - s\frac{P(t-\tau)}{AP(t)^{\alpha}}\right]\right)$$

Después evaluémoslo considerando los resultados anteriores

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(r_0\left[1 - s\frac{P(t-\tau)}{AP(t)^{\alpha}}\right]\right).$$
$$0 = r_0 - \frac{rs}{A}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{P(t-\tau)}{P(t)^{\alpha}}\right)$$
$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{P(t-\tau)}{P(t)^{\alpha}}\right) = \frac{A}{s}$$

$$P_e = \left(\frac{s}{A}\right)^{1/(\alpha-1)} \quad (17')$$

La conclusión es que el valor estacionario de la ecuación logística con rezagos coincide con el atractor del sistema (5) o, lo que es igual, los rezagos pueden alterar la convergencia al estado estable pero no su valor límite. La manera como esto se produce es a través de cambios en los valores de r_0 y τ que, como menciona Gopalsamy (1992), son los repsonsables de los comportamientos cuasiperiódicos o fluctuaciones en el término $P(t-\tau)$.[15]

¿Cómo es la naturaleza de esas oscilaciones? Kuang (1993) señala que si se cumple la condición de $r_0\tau < \pi/2$ entonces las oscilaciones producidas por ecuaciones como (17) serán temporales y no alterarán la estabilidad asintótica global de las trayectorias en la vecindad del atractor estable.[16] Pero si $r_0\tau > \pi/2$, entonces las cosas cambiarán radicalmente, pues en ese intervalo las trayectorias no convergerán a ningún atractor estable y las oscilaciones serán permanentes.

2.3. La aplicación al caso de México

2.3.1. Especificaciones sobre la ecuación logística

Para lograr una interpretación más intuitiva del modelo basado en las ecuaciones (5) - (17) realizamos una simulación de la trayectoria de población mexicana considerando los siguientes dos aspectos: 1) la ecuación (12) puede ser adaptada indistintamente para describir equilibrios maltusianos con salarios bajos o altos; y 2) el valor límite de (17′) es el mismo con tasas de natalidad y mortalidad variables o constantes.

En lo que toca al primer aspecto, Dooley (1998) menciona que el nivel de subsistencia es fijado por la respuesta de la población a los salarios y como esa respuesta es variable entonces es dable esperar diferentes equilibrios o “niveles de subsistencia”. En particular, se presentan dos situaciones polares en las sociedades: la de “alta presión” que caracteriza a los países pobres donde el equilibrio es fijado a salarios bajos y la de “baja presión” o de salarios altos asociada con la experiencia de los países desarrollados. La primera situación reproduce el cuadro clásico del *Ensayo* donde el crecimiento de la población y los medios de subsistencia *per cápita* se mueven en la misma dirección, mientras que la segunda describe la versión moderna del equilibrio maltusiano en la que una caída en los salarios *per cápita* puede estar acompañada, incluso, por crecimientos positivos de la población o viceversa

---

15 Las fluctuaciones producidas por $P(t-\tau)$ obedecen al efecto que tienen los cambios en los medios de subsistencia sobre las tasas medias de natalidad y mortalidad durante el intervalo $(t-\tau, t)$. De aquí que sea factible esperar que la población oscile en torno a su punto de equilibrio, dependiendo de las variaciones en los medios de subsistencia existentes.

16 La amplitud de las oscilaciones dependerá del valor absoluto del factor de expansión así como de la longitud de τ.

(Dooley, 1998 4). Otra forma de apreciar estas relaciones es analizando la tasa instantánea del crecimiento del producto *per cápita* que se obtiene dividiendo (6) por $x(t) = K(t)/P(t)$; esto es:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} + (\alpha - 1)\frac{P'(t)}{P(t)} \quad (18)$$

De acuerdo con esta expresión si

$$\frac{A'(t)}{A(t)} \geq (1-\alpha)\frac{P'(t)}{P(t)} \ \text{ y } \ 0 < \alpha < 1,$$

entonces la tasa instantánea de crecimiento del producto per cápita será positiva independientemente del crecimiento de la población, pero en caso contrario la situación será muy diferente: la primera tasa será decreciente con respecto a la última.[17] En consecuencia, si consideramos distintos intervalos de tiempo para uno o varios países y estimamos empíricamente $x'(t)/x(t)$ y $P'(t)/P(t)$ es posible observar una relación inversa para algunos periodos y positiva para otros, sin salirnos del esquema maltusiano (Blanchet1990).

El segundo aspecto está relacionado con el hecho de que la introducción de tasas variables de natalidad y mortalidad no altera el valor límite de (17) pero si sus condiciones de convergencia. Para ilustrar este punto simularemos la ecuación (19) considerando como Ordorica (1990) que la tasa de natalidad sigue un comportamiento logístico, y por construcción de (17), parecido a la tasa de mortalidad (pues como sabemos $b = r(t)s(t)/K$ es una función inversa del salario *per cápita*):

$$r_0(t) = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a_1 + a_2 t}} \quad (19)$$

donde k_1 y $k_1 + k_2$ son, respectivamente, las asíntotas inferior y superior de la tasa de natalidad; a_1 es el nivel de la natalidad y a_2 la velocidad de cambio de $r(t)$. La ecuación resultante del nuevo añadido es:

[17] En particular si no existe cambio tecnológico, siempre se observará este comportamiento.

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=\left[k_1+\frac{k_2}{1+e^{a_1+a_2t}}\right]\left[1-s(t)\frac{P(t-\tau)}{K(t)}\right] \quad (20)$$

cuyo valor límite es similar a $(17')$ dado que $\lim_{t\to\infty} r_0(t)=k_1$; $\lim_{t\to\infty} s(t)=s$; $\lim_{t\to\infty} P(t-\tau)=P$; $\lim_{t\to\infty} K(t)=K=AP^{\alpha}$; y $\lim_{t\to\infty} A(t)=A$; esto es:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=\lim_{t\to\infty}\left[k_1+\frac{k_2}{1+e^{a_1+a_2t}}\right]\left[1-s(t)\frac{P(t-\tau)}{K(t)}\right]$$

$$k_1\left[1-\lim_{t\to\infty} s(t)\frac{\lim_{t\to\infty} P(t-\tau)}{\lim_{t\to\infty} K(t)}\right]=0$$

$$k_1\left[1-s\frac{P}{AP^{\alpha}}\right]=0\Rightarrow P_e(t)=\left(\frac{A}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La gran diferencia entre (20) y (17) reside en el recorrido de las trayectorias de población, pues la perturbación producida por $r_0(t)$ acentúa aún más las oscilaciones producidas por el rezago τ en la relación establecida por $\frac{x'(t)}{x(t)}$ y $\frac{P'(t)}{P(t)}$ en (18).

2.3.2. Simulación

Los resultados presentados a continuación consideran el impacto de los rezagos, primero, sobre la relación entre $P'(t)/P(t)$ y $K'(t)/K(t)$ y, luego, sobre la estabilidad de las proyecciones de la población mexicana entre 1930 y 2050. Para el primer caso se estima la ecuación (18) con el siguiente modelo de regresión

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+u_t \quad (22)$$

donde $X_t=\frac{\Delta P_t}{P_t}$ es la tasa de crecimiento de la población, $Y_t=\frac{\Delta K_t}{K_t}$ la tasa de crecimiento del producto per cápita y u_t el error aleatorio. Para el segundo caso se toma el modelo

$$Y_t = ß_0 + ß_1 P_t + u_t \quad (22)$$

para estimar una versión simplificada de (20) con $Y_t = \frac{\Delta P_t}{P_t} = r_0\left[1 - \frac{P_t}{K}\right]$, y u_t el error aleatorio.

Los datos sobre población y producto (a precios constantes) usados en ambos modelos provienen del INEGI (varios años) mientras que los valores de τ son fijados a discreción tomando como población inicial $P_{1930} = 17063300$. El estimador del parámetro α es supuesto igual al valor esperado de la variable aleatoria de una distribución uniforme cero-uno, es decir $\alpha = 0.5$.[18] Para calcular la tasa media anual de natalidad y la población estacionaria se usa la serie de tiempo P_t suponiendo que no hay migración ni cambios en la estructura etaria y que (19) evoluciona conforme a los siguientes valores calculados por Ordorica (1990): $k_1 = 0.010$, $k_2 = 0.040$, $a_2 = -3.53927$ y $a_1 = 0.059483$. Las rutinas de los métodos numéricos están basados en los códigos de software disponibles en *http://www.runet.edu/~thompson/webddes/*.

Las tablas 1, 2 y 3 resumen la relación descrita por (18) considerando diferentes valores de τ (0, 25,40 y 50 años) y periodos sucesivos bianuales en los que se mide el impacto del rezago. Ahí se observa que los coeficientes de regresión entre las tasas de crecimiento del producto y de la producción tienden a ser negativos a medida que se incrementa la longitud de τ y el periodo de su impacto.[19]

La tabla 1 muestra que en ausencia de rezagos las relaciones son predominantemente positivas (sin considerar los periodos bianuales 1-3 y 5-7); muy al contrario de lo que acontece en las tablas 2 y 3 donde se observa una fuerte relación negativa entre mayor sea el periodo bianual del impacto. La explicación reside en que sin rezagos no hay posibilidad de cambios en los patrones demográficos de los años iniciales considerados en la simulación (1930-1943) mientras que con rezagos aumenta la posibilidad de que suceda lo opuesto; esto es, que los efectos de un mejor nivel de vida —medido en producto *per cápita* del año proyectado por el rezago— se reflejen en esquemas demográficos más modernos.

Esta misma situación en la que se observa un cambio de signo positivo a negativo entre las tasas de crecimiento de producción y población conforme

---

18 La simulación de la tasa de crecimiento del producto requiere un valor de α, anteriormente habíamos estimado para México $\alpha = 0.68$, pero puede tomarse $\alpha = 0.5$ si suponemos que la constante se comporta como una variable aleatoria uniforme cero-uno cuyo valor esperado es 0.5, Blanchet, (1990). En cualquier caso los resultados no varían sustancialmente y las conclusiones son las mismas.

19 En particular siempre se observará este comportamiento en caso de no existir cambio tecnológico.

aumenta el nivel de bienestar ha sido documentada para varios países por Blanchet (1990) con el uso de un modelo maltusiano.

TABLA 1. SIMULACIÓN SIN REZAGOS

PERIODOS	TASA MEDIA DE CRECIMIENTO DEL PRODUCTO PER CÁPITA	TASA MEDIA DE CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN	COEFICIENTE DE REGRESIÓN
1-3	0.0229	0.0209	-16.11*
3-5	0.0386	0.0205	5.84*
5-7	0.0240	0.0201	-20.50*
7-9	0.0231	0.0192	8.61*
9-11	0.0046	0.0184	50.23*
11-13	0.0177	0.0180	4.09*

Nota: Los asteriscos indican que los coeficientes son significativos a un 0.1 de nivel de significancia.

TABLA 2. SIMULACIÓN CON UN REZAGO DE 25 AÑOS

PERIODOS	TASA MEDIA DE CRECIMIENTO DEL PRODUCTO PER CÁPITA	TASA MEDIA DE CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN	COEFICIENTE DE REGRESIÓN
1-3	0.0229	0.0308	-16.86*
3-5	0.0386	0.0301	14.96*
5-7	0.0240	0.0294	-17.37*
7-9	0.0231	0.0287	15.87*
9-11	0.0046	0.0280	15.81*
11-13	0.0177	0.0273	-7.67*

Nota: Los asteriscos indican que los coeficientes son significativos a un 0.1 de nivel de significancia.

TABLA 3. SIMULACIÓN CON UN REZAGO DE 50 AÑOS

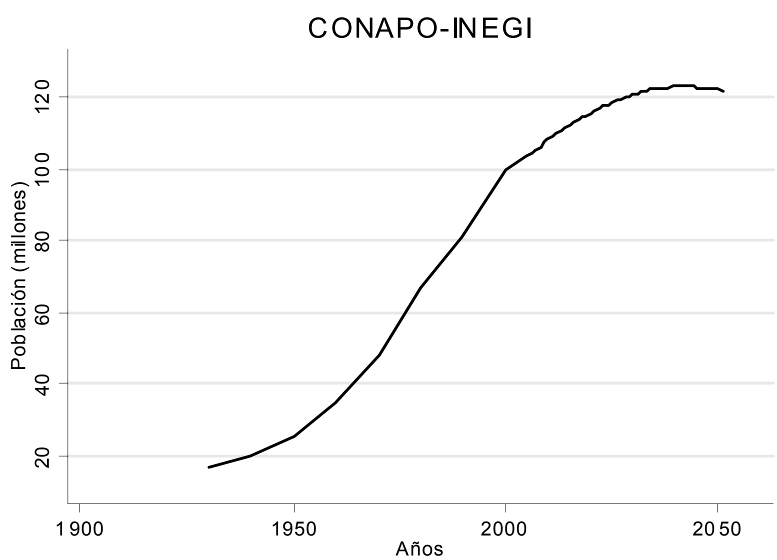
PERIODOS	TASA MEDIA DE CRECIMIENTO DEL PRODUCTO PER CÁPITA	TASA MEDIA DE CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN	COEFICIENTE DE REGRESIÓN
1-3	0.0229	0.0215	-18.08*
3-5	0.0386	0.0209	16.98*
5-7	0.0240	0.0203	-20.14*
7-9	0.0231	0.0196	19.42*
9-11	0.0046	0.0190	-1.18*
11-13	0.0177	0.0184	-9.27*

Nota: Los asteriscos indican que los coeficientes son significativos a un 0.1 de nivel de significancia.

Los efectos de los rezagos se aprecian más nítidamente al analizar la estabilidad de la trayectoria de la población en torno al atractor estable. Para tal efecto haremos una comparación entre nuestras proyecciones y las realizadas por el Consejo Nacional de Población (CONAPO 2006), la agencia gubernamental encargada de las políticas demográficas en México, y por Ordorica (1990). La idea es comparar los valores estimados de la población con metodologías que comparten, por igual, similitudes y diferencias pero que no incluyen, como en nuestro caso, rezagos. Entre las similitudes hay que destacar la adopción por parte de las tres de formas funcionales logísticas (expologística en el caso de Ordorica) y de hipótesis variables sobre las tasas de mortalidad y fecundidad y, entre las diferencias, la naturaleza eminentemente demográfica de algunas metodologías (CONAPO y Ordorica) contra la versión económico-demográfica de otras (como la nuestra).

En concreto, CONAPO (2006) e INEGI (varios años) concluyen que la población del país describe una curva logística entre 1930 y 2050 con un valor límite en el último año (ver figura 1). Las hipótesis de sus proyecciones toman en cuenta una estructura por edades estacionaria y diferentes escenarios de crecimiento estable para la fecundidad, mortalidad y los saldos netos migratorios. Los datos de la figura 1 alcanzan un máximo de 122.9 millones en 1940 y un valor estable de 121.9 millones diez años después. La fijación del techo máximo del crecimiento de la población no incorpora ninguna hipótesis económica sobre el crecimiento del producto *per cápita*. El trabajo de Ordorica incluye, por su parte, hipótesis de comportamiento logístico sobre las tasas de mortalidad y fecundidad pero sin considerar cambios en la migración y la estructura por edades. Sus resultados no registran ningún valor límite debido a que su especificación sobre la trayectoria de $P(t)$ no es convergente.

FIGURA 1: CRECIMIENTO FUTURO DE LA POBLACIÓN MEXICANA ENTRE 1930 Y 2050



Fuente: INEGI (varios años) y CONAPO (2006).

Finalmente, nuestra proyección es calculada con base en (22) suponiendo una longitud de rezago de 25 años. De acuerdo con la tabla 4 y la figura 3, la introducción de un techo económico y el "efecto de arrastre" de patrones de fecundidad rezagados en (22) generan volúmenes de población proyectados superiores a los ofrecidos por CONAPO pero inferiores a los de Ordorica en 2050.

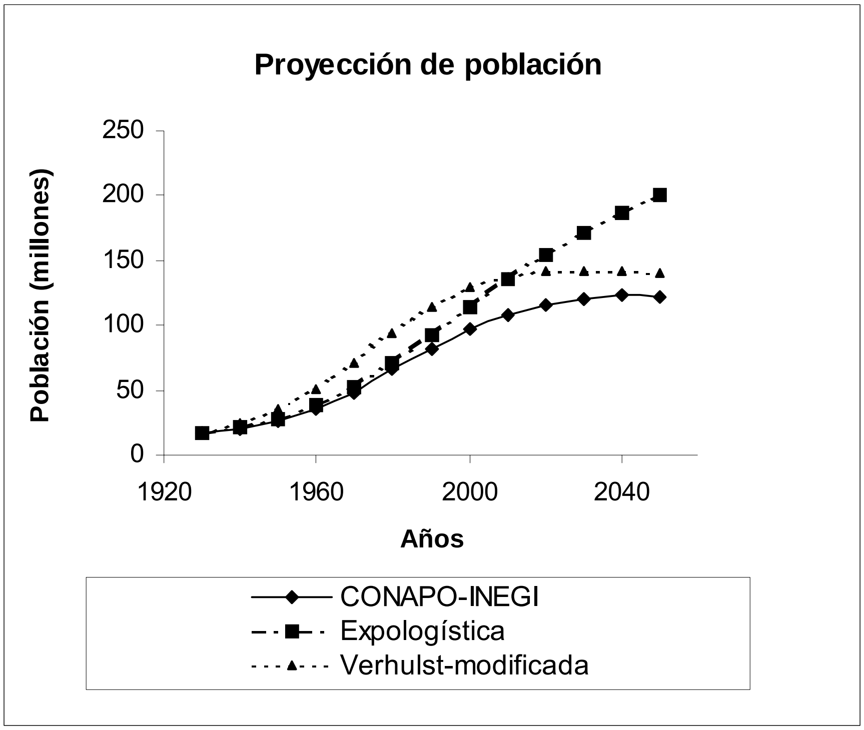
De hecho la serie de datos de (22) alcanza su valor límite en un año diferente a 2050 pues su convergencia a $P_e(t)=135\ 019\ 560$ depende del valor de τ. Los distintos recuadros de la figura 3 muestran este último aspecto al hacer evidente que entre mayor sea la longitud de τ mayor es el tiempo que toma a la serie converger a $P_e(t)$ y más acentuada la presencia de oscilaciones.

TABLA 4. PROYECCIONES DE LA POBLACIÓN MEXICANA SEGÚN VARIAS FUENTES

AÑO	POBLACIÓN PROYECTADA POR CONAPO (MILLONES)	POBLACIÓN PROYECTADA POR ORDORICA (MILLONES)	POBLACIÓN PROYECTADA CON UN REZAGO DE 25 AÑOS
1930	17.1	17.1	17.1
1940	19.7	21.4	24.9
1950	25.8	28.2	35.7
1960	34.9	38.3	51.1
1970	48.2	52.5	71.6
1980	66.8	70.9	94.1
1990	81.2	92.5	114.5
2000	97.5	114.9	129.4
2010	107.9	136.1	137.9
2020	115.4	154.8	141.4
2030	120.7	171.5	142.2
2040	122.9	186.6	141.8
2050	121.9	201.1	141.1

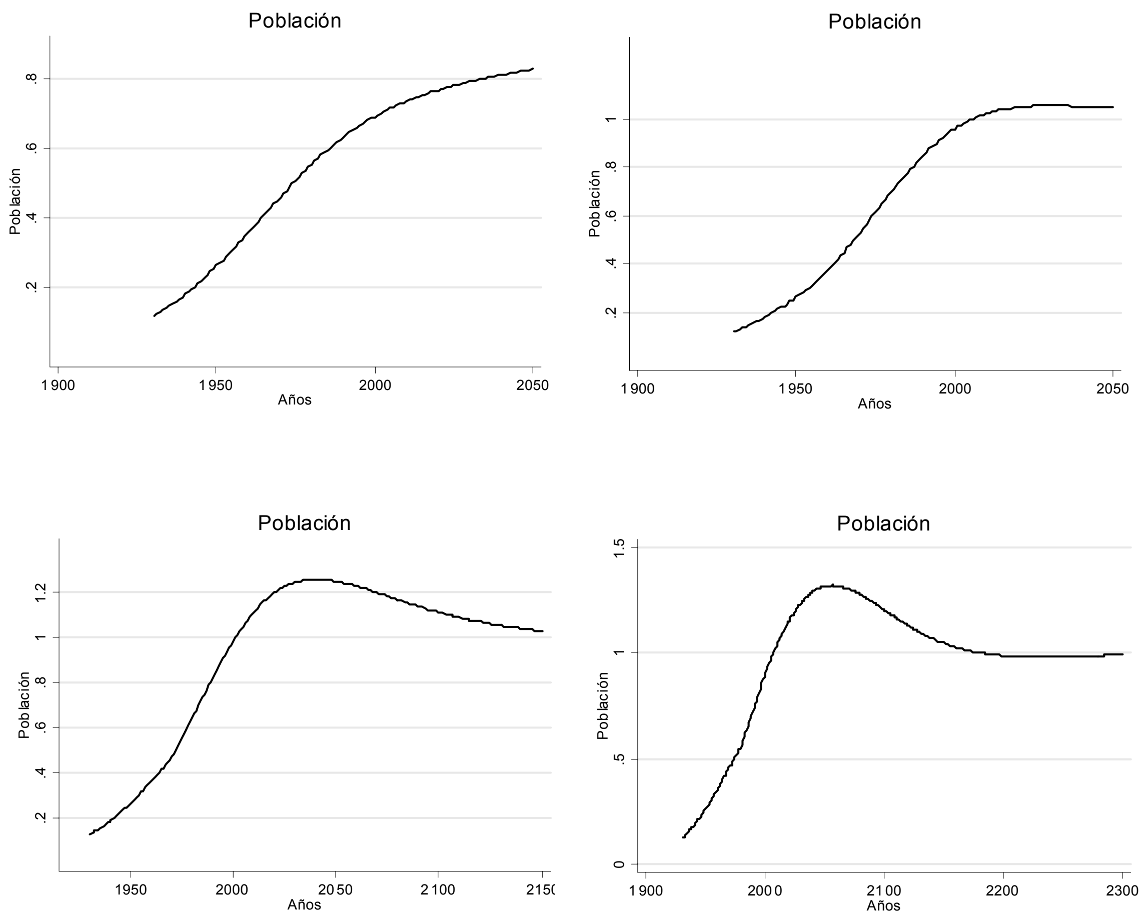
Fuente: INEGI (varios años) y CONAPO (2006).

FIGURA 2. MÉXICO: PROYECCIONES DE POBLACIÓN ENTRE 1930 Y 2050



Fuente: INEGI (varios años) y CONAPO (2006).

FIGURA 3. PROYECCIONES DE LA POBLACIÓN MEXICANA CON MÚLTIPLES REZAGOS



Nota. Los recuadros de izquierda a derecha y de arriba abajo muestran la trayectoria de la población mexicana con cero, 25, 40 y 50 años de rezago. El número uno de la escala en la ordenada es equivalente al valor de la población estacionaria.

En resumen, podemos concluir que las estimaciones basadas en (22) suponen que la población de México converge a un punto estable de "salarios altos" en el largo plazo en virtud de que $r_0\tau = (0.031)(\tau) < \pi/2$, $\tau \in (0,50]$. El valor límite de esa población es diferente en volumen y fechas de convergencia a las cifras oficiales calculadas por CONAPO (2006), en parte por la magnitud de los rezagos introducidos y en parte por la sobreestimación que produce incluir techos económicos más amplios a una población con patrones de fecundidad menos modernos. La acción de ambos componentes explica la joroba más pronunciada de la trayectoria de $P(t)$ en nuestra proyección que en la de CONAPO (ver figura 2). Las oscilaciones por su parte son explicadas por la presenciad del rezago en el componente $s\frac{P(t-\tau)}{K}$ pues, como se observa en las figura 3, conforme aumenta el tamaño del rezago se acentúa el efecto de la variación en el ingreso *per cápita* (reflejados mediante $P(t-\tau)/K$) sobre la población. En particular para valores de $25 \leq \tau \leq 50$ las oscilaciones son más marcadas respecto del punto de equilibrio. El resultado es previsible e intuitivo porque para observar fluctuaciones en el tamaño de la población es necesario considerar periodos suficientemente largos en el tiempo a fin de que el mecanismo de los medios de subsistencia surta efecto en la dinámica de la población.[20]

[20] En nuestro ejemplo parece comprobarse la hipótesis maltusiana enfatizada por Waterman (1987) de que las fluctuaciones aparecen en el tiempo de una generación; esto es cada veinticinco años.

Conclusiones: ¿Por qué no es conveniente olvidar a Malthus?

Los apartados del documento sostienen que el estudio actualizado del *principio* de población admite equilibrios dinámicos con oscilaciones que pueden auxiliar en la mejor comprensión de la estabilidad de las poblaciones. La conclusión es reveladora no sólo porque rompe con la idea largamente establecida de que el *principio* ofrece únicamente soluciones estacionarias con salarios bajos sino, también, porque abre una oportunidad para replantear otros equilibrios en los modelos demo-económicos. Este último punto es importante destacarlo porque la mayoría de los autores se concentra, casi exclusivamente, en el uso de modelos que revelen trayectorias *suaves* de crecimiento de la población y del ingreso. Y eso no deja de llamar la atención, sobre todo porque es en el estudio de las oscilaciones donde el pensamiento de Malthus cobra actualidad y da pie a incorporar otras disciplinas que expliquen las mediaciones económicas y demográficas señaladas en el *Ensayo*. La polaridad de puntos de vista sobre cómo formalizar esas oscilaciones sugiere que su entendimiento todavía es un asunto inconcluso.

Los resultados del documento basados en (17) son reveladores por dos aspectos. Primero porque el uso de esa ecuación permite predecir comportamientos futuros de la población con más elementos que las tradicionales proyecciones demográficas basadas en las tendencias pasadas de $P(t)$: los ajustes continuos y bien ponderados en los valores de los parámetros α, r_0, A y τ de (17) pueden auxiliar en la elaboración de pronósticos acordes con la situación económica de un país. Y segundo porque (17) enfatiza el hecho de que las oscilaciones descritas en el *Ensayo* no son una mención aislada o marginal del estado estacionario sino una consecuencia de la visión diferencial que Malthus tenía sobre las conductas demográficas prevalecientes en una sociedad.

Las diferencias culturales que afectan las decisiones de fecundidad o las desigualdades materiales que modelan los patrones de morbilidad son aspectos presentes en el estudio de las oscilaciones. Para Malthus la población reacciona de diferentes maneras porque, en sociedades divididas por clases sociales, no todos tienen los mismos recursos. Consecuentemente los ajustes instantáneos entre las tasas de crecimiento y la homogeneización de estándares de vida en el estado estacionario son formas conceptuales que se oponen al pensamiento maltusiano y que pertenecen más bien al reino de sus interlocutores neoclásicos o marxistas.

Con todo esto queda claro, entonces, que la intención de modelar el *principio* de Malthus bajo esta nueva óptica no es sólo un mero ejercicio de exégesis. Es más bien un medio para revitalizar con nuevas herramientas el objeto de estudio de los grandes problemas económicos y demográficos que, a decir de Goodwin 1978), se perdió con el advenimiento de la teoría neoclásica de crecimiento económico. El principio de población, con todas sus deficiencias y cargas ideológicas largamente señaladas por sus detractores de todas tendencias, ha sido sin duda la construcción teórica más avanzada que ha puesto a la demografía en el centro de la discusión de los problemas económicos (Ramírez y Morelos 2002).

Con la introducción de los fallidos modelos demo-económicos y, más recientemente, de los modelos de generaciones traslapadas, la importancia de la población ha sido reducida a tal grado que apenas se alcanza a diferenciar su función de otras variables económicas. Y esto puede ser peligroso, porque la consabida salida tecnológica a la trampa maltusiana no garantiza la desaparición de los problemas resultantes de la explosión demográfica que no tienen que ver con el empobrecimiento de la población en el estado estacionario. Nos referimos a los terribles problemas derivados de la deforestación, el agotamiento de los mantos acuíferos, la contaminación y los conflictos sociales derivados de la sobreurbanización, cuyos anuncios nos alertan de la necesidad de pensar los problemas demográficos en términos generales, como lo plantea Malthus en el *Ensayo*, y no sólo en su relación extrema. El pudor o, quizás vergüenza, de darle un giro a las interpretaciones mecánicas del *principio* y de aceptar la actualidad de las ideas de Malthus es uno de los demonios más duros de vencer. Y eso, en las condiciones de hacinamiento y pobreza en que vive una gran parte de la población mundial suena a mera hipocresía.

Bibliografía

Blanchet, D. (1990),"Population growth and income growth during the demographic transition : Does a Malthusian model help explain their relationship?" Population : An English Selection, Vol. 2, pp. 37-52.
Blanchet, D. (1998), "Demographic models and chaotic demo-dynamics". Population : An English Selection, Vol. 10 (1), pp. 139-150.
Bonneuil, N. (ed.) (1994), "Special issue: non linear models in demography". Mathematical Population Studies, Vol. 5 (1), pp. 1-119.
Consejo Nacional de Población (2006), "Proyecciones de la población de México 2005-2050". CONAPO, México.
Davis, K. (1998), "Introducción. Apreciación crítica de Malthus" en Malthus, T. Ensayo sobre el Principio de Población (Segunda edición). México, FCE, pp. XXXIX-LXXIII.
Day, R. H. (1983), "The emergent of chaos from classical economic growth". Quarterly Journal of Economics, 98, pp. 201-213.
Dooley, P. (1988), "Malthus on long swings: The general case". Canadian Journal of Economics, vol. XX1 (1).
Eltis, W. (1984), The classical theory of economic growth. New York, St Martin's Press.
Goodwin, R. (1978), "Wicksell and the Malthusian catastrophe". The Scandinavian Journal of Economics, vol. 80 (2) pp. 190-198.
Gopalsamy, K. (1992), Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
Hartwick, J.,M. (1988), "Robert Wallace and Malthus and the ratios". History of Political Economy 20, pp. 357-379.
INEGI (varios años) "Censos de Población y Vivienda, 1895–2000" http://www.inegi.gob.mx
Kuang Y. (1993), Delay differential equations with applications in population dynamics. London, Academic Press.
Liz, E. (2006), "Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos" publicació electrônica de divulgació del Departament de Matemátiques de la Universitat Autônoma de Barcelona. www.mat.uab.cat/matmat
Lotka, A., J. (1969), Teoría analítica de las asociaciones biológicas. Santiago de Chile, CELADE.
Lotka, A., J. (1973), Demografía matemática. Santiago de Chile, CELADE.
Malthus, T. R. (1998), Ensayo sobre el principio de población (Segunda edición). México, FCE.
Ordorica, M. (1990), "Ajuste de una función expologística a la evolución de la población total de México, 1930-1985". Estudios Demográficos y Urbanos, 5, 3, pp. 373-386.
Pasinetti, L.L. (1978), Crecimiento económico y distribución de la renta. Madrid, Alianza Universidad.
Pingle, M. (2003), "Introducing dynamic analysis using Malthus's principle of population". Journal of Economic Education pp. 3-20.

Praskwetz, A. and Feichteinger, G. (1995), “Endogenous population growth may imply chaos”. Journal of Population Economics, 8, pp. 59-80.

Rámirez, J. C. y Juárez, D. (2009), “La nueva escalada matemática. El impacto reciente de la teoría de los sistemas dinámicos en Economía”. Economía Mexicana. Nueva época. Vol. XVIII (1).

Ramírez, J.C. y Morelos, J.B. (2002), “El concepto de población en los modelos de crecimiento económico”. Trimestre Económico VOL. LXIX (2) núm. 274, pp.145-190.

Samuelson, P.A. (1978), “The canonical model of political economy”. Journal of Economic Literature Vol. 16 (4) pp. 1415-1434.

Stigler, G. J. (1952), The Ricardian theory of value and distribution. Journal of Political Economy Vol. 60 (3) pp. 187-207.

Tudela, F. (1998), “Prólogo” en Malthus, T. Ensayo sobre el principio de población (Segunda edición). México, FCE, pp. V-XXXVII.

Waterman, A., M., C. (1987), “On the Malthusian theory of long swings”. The Canadian Journal of Economics vol. 20 (2) pp. 257-270.

Waterman, A., M., C. (1998), “Malthus, mathematics, and the mythology of coherence”. History of Political Economy vol 30 (4).

Wrigley, E. A. (1986), “Introduction” in E. A. Wrigley and David Souden (eds.), The works of Thomas Robert Malthus, vol. 1. London, William Pickering.

Novedades

División de Administración Pública

Casar, Ma. Amparo, *Los gobiernos sin mayoría en México: 1997-2006*, DTAP-195
De Angoitia, Regina, *La evolución de los portales del gobierno federal: la experiencia de ocho dependencias*, DTAP-196
Cabrero, Enrique, *De la descentralización como aspiración a la descentralización como problema*, DTAP-197
Sour, Laura y Eunises Rosillo, *¿Cuáles son los resultados del presupuesto por resultados?*, DTAP-198
Arellano, David y Walter Lepore, *Prevención y control de conflictos de interés: lecciones para la Administración Pública Federal en México…*, DTAP-199
Sour, Laura y Fredy Girón, *El efecto flypaper de las transferencias intergubernamentales del ramo 28…*, DTAP-200
Mariscal, Judith, *Convergencia tecnológica y armonización regulatoria en México: una evaluación de los instrumentos regulatorios*, DTAP-201
Mariscal, Judith, *Market Structure in the Latin American Mobile Sector*, DTAP-202
De Angoitia, Regina y Fernando Ramírez, *Estrategias utilizadas para minimizar costos por los usuarios de telefonía celular…*, DTAP-203
Cejudo, Guillermo, Gilberto Sánchez y Dionisio Zabaleta, *El (casi inexistente) debate conceptual sobre la calidad del gobierno*, DTAP-204

División de Economía

Hernández, Kólver, *State-Dependent Nominal Rigidities & Disinflation Programs in Small Open Economies*, DTE-418
Hernández, Kólver and Asli Leblebicioglu, *A Regime Switching Analysis of the Exchange Rate Pass-through*, DTE-419
Ramírez, José Carlos y David Juárez, *Viejas ideas económicas con nuevas tecnologías matemáticas*, DTE-420
Delajara, Marcelo, *Household and Community Determinants of Infants' Nutritional Status in Argentina*, DTE-421
Villagómez, Alejandro, Robert Duval y Lucía Cerilla, *Análisis de la evolución de la matrícula de la licenciatura en economía en México, 1974-2004*, DTE-422
Brito, Dagobert and Juan Rosellón, *Quasi-Rents and Pricing Gas in Mexico*, DTE-423
Rosellón, Juan and Hannes Weigt, *A Dynamic Incentive Mechanism for Transmission Expansion in Electricity Networks-Theory, Modeling and Application*, DTE-424
Smith, Ricardo, *A Monte Carlo EM Algorithm for FIML Estimation of Multivariate Endogenous Switching Models with Censored and Discrete Responses*, DTE-425
Brito, Dagobert and Juan Rosellón, *Lumpy Investment in Regulated Natural Gas Pipelines: An Application of the Theory of The Second Best*, DTE-426
Di Giannatale, Sonia, Patricia López y María José Roa, *Una introducción conceptual al desarrollo financiero, capital social y anonimidad: el caso de México*, DTE-427

División de Estudios Internacionales

González, Guadalupe, *Percepciones sociales sobre la migración en México y Estados Unidos: ¿hay espacios para cooperar?*, DTEI-162
Bernhard, William y David Leblang, *Standing Tall When the Wind Shifts: Financial Market Responses to Elections, Disasters and Terrorist Attacks*, DTEI-163
Velázquez, Rafael, *La relación entre el Ejecutivo y el Congreso en materia de política exterior durante el sexenio de Vicente Fox…*, DTEI-164
Ruano, Lorena, *De la exaltación al tedio: las relaciones entre México y la Unión Europea…*, DTEI-165
Martínez, Ferrán e Ignacio Lago Peñas, *Why new Parties? Changes in the number of Parties over time within Countries*, DTEI-166
Sotomayor, Arturo, *México y la ONU en momentos de transición: entre el activismo internacional, parálisis interna y crisis internacional*, DTEI-167
Velasco, Jesús, *Acuerdo migratorio: la debilidad de la esperanza,* DTEI-168
Velázquez, Rafael y Roberto Domínguez, *Relaciones México-Unión Europea: una evaluación general en el sexenio del presidente Vicente Fox*, DTEI-169
Martínez i Coma, Ferrán e Ignacio Lago Peñas, *¿Qué piensan los mexicanos de los Estados Unidos?*, DTEI-170
Velasco, Jesús, *Lou Dobbs and the Rise of Modern Nativism*, DTEI-171

División de Estudios Jurídicos

Magaloni, Ana Laura, *¿Cómo estudiar el derecho desde una perspectiva dinámica?*, DTEJ-19
Fondevila, Gustavo, *Cumplimiento de normativa y satisfacción laboral: un estudio de impacto en México*, DTEJ-20
Posadas, Alejandro, *La educación jurídica en el CIDE (México). El adecuado balance entre la innovación y la tradición*, DTEJ-21
Ingram, Matthew C., *Judicial Politics in the Mexican States: Theoretical and Methodological Foundations*, DTEJ-22
Fondevila, Gustavo e Ingram Matthew, *Detención y uso de la fuerza*, DTEJ-23
Magaloni, Ana Laura y Ana María Ibarra Olguín, *La configuración jurisprudencial de los derechos fundamentales…*, DTEJ-24
Magaloni, Ana Laura, *¿Por qué la Suprema Corte no ha sido un instrumento para la defensa de derechos fundamentales?*, DTEJ-25
Magaloni, Ana Laura, *Arbitrariedad e ineficiencia de la procuración de justicia: dos caras de la misma moneda*, DTEJ-26
Ibarra, Ana María, *Los artificios de la Dogmática Jurídica*, DTEJ-27
Fierro, Ana Elena y Adriana García, *Responsabilidad patrimonial del Estado. Interpretación de la SCJN del artículo 113 constitucional*, DTEJ-28

División de Estudios Políticos

Lehoucq, Fabrice, *Why is Structural Reform Stangnating in Mexico? Policy Reform Episodes from Salinas to Fox*, DTEP-195
Benton, Allyson, *Latin America's (Legal) Subnational Authoritarian Enclaves: The Case of Mexico*, DTEP-196
Hacker, Casiano y Jeffrey Thomas, *An Antitrust Theory of Group Recognition*, DTEP-197
Hacker, Casiano y Jeffrey Thomas, *Operationalizing and Reconstructing the Theory of Nationalism*, DTEP-198
Langston, Joy y Allyson Benton, *"A ras de suelo": Candidate Appearances and Events in Mexico's Presidential Campaign*, DTEP-199
Negretto, Gabriel, *The Durability of Constitutions in Changing Environments…*, DTEP-200
Langston, Joy, *Hasta en las mejores familias: Madrazo and the PRI in the 2006 Presidential Elections*, DTEP-201
Schedler, Andreas, *Protest Beats Manipulation. Exploring Sources of Interparty Competition under Competitive and Hegemonic Authoritarianism*, DTEP-202
Villagómez, Alejandro y Jennifer Farias, *Análisis de la evolución de la matrícula de las licenciaturas en CP, AP y RI en México, 1974-2004*, DTEP-203
Ríos, Julio, *Judicial Institutions and Corruption Control*, DTEP-204

División de Historia

Barrón, Luis, *Revolucionarios sí, pero Revolución no*, DTH-44
Pipitone, Ugo, *Oaxaca: comunidad, instituciones, vanguardias*, DTH-45
Barrón, Luis, *Venustiano Carranza: un político porfiriano en la Revolución*, DTH-46
Tenorio, Mauricio y Laurencio Sanguino, *Orígenes de una ciudad mexicana: Chicago y la ciencia del* Mexican Problem *(1900-1930)*, DTH-47
Rojas, Rafael, *José María Heredia y la tradición republicana*, DTH-48
Rojas, Rafael, *Traductores de la libertad: el americanismo de los primeros republicanos*, DTH-49
Sánchez, Mónica Judith, *History* vs. *the Eternal Present or Liberal Individualism and the Morality of Compassion and Trust*, DTH-50
Medina, Luis, *Salida: los años de Zedillo*, DTH-51
Sauter, Michael, *The Edict on Religion of 1788 and the Statistics of Public Discussion in Prussia*, DTH-52
Sauter, Michael, *Conscience and the Rhetoric of Freedom: Fichte's Reaction to the Edict on Religion*, DTH-53

Ventas

El **CIDE** es una institución de educación superior especializada particularmente en las disciplinas de Economía, Administración Pública, Estudios Internacionales, Estudios Políticos, Historia y Estudios Jurídicos. El Centro publica, como producto del ejercicio intelectual de sus investigadores, **libros, documentos de trabajo,** y **cuatro revistas especializadas:** *Gestión y Política Pública*, *Política y Gobierno*, *Economía Mexicana Nueva Época* e *Istor*.

Para adquirir cualquiera de estas publicaciones, le ofrecemos las siguientes opciones:

VENTAS DIRECTAS:	VENTAS EN LÍNEA:
Tel. Directo: 5081-4003 Tel: 5727-9800 Ext. 6094 y 6091 Fax: 5727 9800 Ext. 6314 Av. Constituyentes 1046, 1er piso, Col. Lomas Altas, Del. Álvaro Obregón, 11950, México, D.F.	Librería virtual: **www.e-cide.com** Dudas y comentarios: **publicaciones@cide.edu**

¡¡Colecciones completas!!

Adquiere los **CDs de las colecciones completas** de los documentos de trabajo de todas las divisiones académicas del CIDE: **Economía**, **Administración Pública**, **Estudios Internacionales**, **Estudios Políticos**, **Historia** y **Estudios Jurídicos.**

¡Nuevo! ¡¡Arma tu CD!!

Visita nuestra Librería Virtual www.e-cide.com y selecciona entre 10 y 20 documentos de trabajo. A partir de tu lista te enviaremos un CD con los documentos que elegiste.