

NÚMERO 430

ADÁN DÍAZ Y JOSÉ CARLOS RAMÍREZ

Una metodología basada en cópulas
y valores extremos para estimar
el capital económico requerido de
un portafolio de créditos al menudeo

OCTUBRE 2008



www.cide.edu

• Las colecciones de Documentos de Trabajo del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).

• D.R. © 2008. Centro de Investigación y Docencia Económicas, carretera México-Toluca 3655 (km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210, México, D.F.
Fax: 5727•9800 ext. 6314
Correo electrónico: publicaciones@cide.edu
www.cide.edu

• Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido así como el estilo y la redacción son su responsabilidad.

Resumen

El documento propone una metodología para estimar el capital económico requerido de un portafolio de créditos al menudeo —personas físicas— basada en los conceptos generales de cópulas y de la teoría de valores extremos (TVE). Los resultados avalan la mayor flexibilidad de la metodología propuesta sobre algunas técnicas tradicionales, en particular cuando ésta incorpora cópulas elípticas generalizadas y/o agrupadas del tipo t de Student para modelar la estructura de dependencia de los parámetros de riesgo, o cuando hace uso de la TVE para analizar el comportamiento de las pérdidas extremas del portafolio. En la aplicación de los algoritmos se utilizan datos de un banco mexicano.

Palabras clave: capital económico requerido, riesgo de crédito, cópulas, valores extremos.

Clasificación JEL: C14, C15, C16 y G32.

Abstract

This paper poses a new methodology to estimate the required economic capital for a retail-credit portfolio. The methodology is based on both the general copula concepts and some core results from the extreme value theory (EVT). The main results support the fact that the proposed methodology is more flexible than other traditional techniques, in particular when it makes use of elliptical generalized or grouped t Student copulas to model the dependence structure of risk-parameters or when it includes elements of the EVT to analyze the extreme losses behavior of a retail-credit portfolio. When applying algorithms, the paper includes data from a Mexican bank.

Keywords: economic capital, credit risk, copulas, extreme value theory.

JEL Classification: C14, C15, C16 y G32.

Introducción

No hay duda que una de las tareas más importantes en la administración de las instituciones financieras es la determinación conjunta de las cantidades óptimas de riesgo y capital. La razón es que el uso eficiente del capital involucrado en la operación de cualquier negocio financiero depende, crucialmente, de un sistema adecuado de valuación de riesgos. Sin el cálculo correcto del monto de capital en riesgo, o capital susceptible de ser perdido en un escenario desfavorable, no es posible estimar de manera realista el costo alternativo de la inversión de los accionistas.

El problema es que mientras las mediciones de riesgo son puntuales y objetivas, las funciones de administración y distribución del capital son una mezcla de ciencia, experiencia y arte (Saita, 2007). En la práctica no hay algoritmos mágicos ni recetas universales que permitan conocer, de manera infalible, los montos óptimos del capital ajustado por riesgo. Hay a lo sumo lineamientos generales, derivados de controles internos o disposiciones regulatorias, que buscan darles a los administradores una idea del balance que existe entre sus estimaciones internas de capital y sus necesidades de protección contra riesgos por pérdidas potenciales.

Los lineamientos regularmente usados para estimar el capital en riesgo buscan definir, primero, el concepto de capital que está bajo consideración y, luego, las medidas de riesgo asociadas a las operaciones cubiertas por ese capital (Matten, 2000). En el primer caso, la definición requiere distinguir entre capital regulatorio (CR) y capital económico (CE), ya que si bien ambos guardan una estrecha correspondencia entre sí no son conceptos intercambiables. Mientras que el CE es el capital en riesgo estimado por la institución para asegurar la viabilidad de sus líneas de negocios, el CR es calculado con base en las disposiciones y metodologías de las autoridades reguladoras. Debido a su distinto origen y, en particular, al hecho de que las instituciones financieras incluyen a menudo clases de riesgos que no necesariamente están contempladas en el CR, ambos montos suelen diferir. Por esa razón se recomienda utilizar el concepto de *capital económico requerido* (CER), o capital en riesgo estimado con independencia de las restricciones regulatorias, ya que a la vez que ofrece una idea más comprensiva y realista de las necesidades diarias de las instituciones para cubrirse de los riesgos, contempla los requerimientos mínimos del capital regulatorio (Saita, 2007). Como es de esperarse, el CER no necesariamente coincide con el capital disponible de la institución.

La estimación del CER varía de acuerdo con cada una de las siguientes nociones de capital adoptadas como base, esto es: como valor en libros, valor de mercado o capitalización de mercado. La variabilidad en cada caso puede ser muy pronunciada, por lo que la elección adecuada de tal o cual noción

depende críticamente de la naturaleza de las posiciones y del tipo de riesgo bajo consideración.

En el cálculo del CER de un portafolio de crédito, por ejemplo, la cantidad fijada como capital en riesgo está determinada por las pérdidas inesperadas de sus posiciones que, a su vez, constituyen una medida de su valor en riesgo. Pero el monto de las pérdidas es muy distinto si se utiliza un enfoque de valor de mercado (*mark-to-market*) que uno basado en el valor en libros (*book-value accounting*). En el primero, el valor de las posiciones sensibles al riesgo es equivalente al valor presente, a precios de mercado, de sus sumas de efectivo descontadas conforme a una tasa ajustada por riesgo. De esta manera, cualquier disminución en el valor presente del portafolio, por efecto digamos de un aumento en la tasa de descuento, se contabilizaría como pérdidas inesperadas. En el segundo enfoque, en cambio, las pérdidas estarían asociadas únicamente a la baja reconocida por las instituciones en el valor en libros de sus posiciones. Las diferencias entre ambos enfoques se traducirían en diferencias en las causas de las pérdidas, pues mientras que una degradación en las calificaciones del acreedor dejaría inafectado el cálculo del CER en valor en libros, en el enfoque de valor de mercado ésta conduciría a mayores márgenes de crédito y, en consecuencia, a un menor valor de mercado de las posiciones.

La correcta especificación del CER no significa, empero, el fin del problema de su estimación sino su inicio. Y es que una vez decidida la noción de capital queda todavía pendiente por seleccionar el *mejor* modelo de estimación del riesgo que nos garantice el cálculo más adecuado del monto del CER; y éste no es un asunto menor. En el ejemplo del riesgo de crédito que mencionamos arriba hay que enfrentar, para empezar, una serie de obstáculos relacionada con la tipificación del portafolio, la estructura de dependencia de los parámetros de riesgo y, finalmente, la confirmación de la superioridad y robustez de las estimaciones.

Como se sabe, en la literatura existe una amplia gama de trabajos que permiten modelar el riesgo de crédito de portafolios de préstamos comerciales —empresas o personas morales— de acuerdo con los lineamientos propuestos por CreditMetrics (CM), KMV PortfolioManager (KMV), CreditRisk+, o CreditPortfolioView (véase Crouhy, Galai y Mark, 2000; y Crosbie y Bohn, 2002). Pero ésta no parece ser la misma situación para los préstamos a personas físicas. La escasez de trabajos en este rubro ha obligado a los practicantes a adaptar los modelos de préstamos comerciales para medir el riesgo de crédito en portafolios de préstamos personales, según sean las necesidades o las disponibilidades de información de las instituciones financieras (De Andrade y Thomas, 2004; Perli y Nayda, 2004). De hecho, las reglas de riesgo de crédito establecidas por Basilea II en su enfoque más avanzado de calificaciones internas (*IRB*) tienen sus bases sobre ciertos

resultados asintóticos para portafolios grandes bajo versiones simplificadas de los modelos del tipo KMV/CM.

Del mismo modo, hay diversas maneras de relacionar los parámetros de riesgo que determinan las pérdidas del portafolio atribuidas al riesgo de crédito –probabilidad de incumplimiento (PD), exposición al incumplimiento (EAD) y pérdida dado el cumplimiento (LGD)– y no todas con los mismos resultados. La adopción de distintas estructuras de dependencia entre los parámetros de riesgo genera, a su vez, distintas distribuciones de pérdidas simuladas y, por ende, diferentes montos de CER.

Por todas estas razones, es claro que el cálculo adecuado del CER requiere de metodologías que sean conceptual y estadísticamente robustas en cada una de sus etapas. La tarea no es, de ninguna manera, fácil ya que lejos de observar en la práctica una utilización homogénea de conceptos y técnicas en la medición de riesgo de crédito, las instituciones financieras han tendido a ajustar discrecionalmente sus estimaciones a los distintos enfoques estipulados por Basilea II. Como resultado, el cálculo del CER de las posiciones de crédito se ha convertido más bien en un ejercicio regido por factores idiosincrásicos, que en una práctica común controlada por disposiciones generales a la industria. Al menos esa es la experiencia de los bancos mexicanos y norteamericanos (Márquez y López, 2006; Saita, 2007).

El objetivo principal de este documento es proponer una metodología orientada a facilitar el cómputo del CER de un portafolio de créditos al menudeo –o de personas físicas– en instituciones financieras como las mexicanas. Para tal efecto, la propuesta busca simultáneamente: 1) establecer la relación entre los parámetros de riesgo mediante el uso de cópulas multivariadas y medir su efectividad frente a otras estructuras de dependencia que han recibido mayor atención en la literatura; 2) aplicar algunos resultados de la Teoría de Valores Extremos (TVE), relacionados con el método de Peaks Over Threshold (POT), para estimar, primero, el Valor en Riesgo (VaR_q), el Déficit Esperado (ES_q) y, luego, el CER del portafolio; 3) comparar la robustez de la metodología con otras consagradas por la práctica mediante pruebas de bondad de ajuste y finalmente, 4) evaluar el impacto que tienen las reglas de capitalización propuestas en el enfoque más avanzado de IRB sobre los requerimientos de capital del portafolio.

Los resultados del documento son, en cierta manera, novedosos pues no hay antecedentes en la literatura local en los que se muestre conjuntamente las siguientes tres características de la metodología aquí propuesta.¹ La primera es el uso comparativo de cópulas multivariadas para ajustar el mejor modelo de dependencia no sólo entre los parámetros de riesgo de un grupo

¹ El único modelo de riesgo de crédito que puede considerarse, por su naturaleza y orientación, un antecedente de este documento está contenido en el excelente libro de Márquez, 2006. Sin embargo el método de estimación que este autor propone está diseñado para préstamos comerciales y con un nivel de agregación nacional que no guarda correspondencia estrecha con el contemplado por nuestra metodología.

particular de créditos sino, también, entre los grupos de créditos y productos constitutivos del portafolio. La segunda es el análisis de las bondades de la diversificación de un portafolio que incluye productos con diferentes índices de dependencia extrema y que no es posible apreciar, por ejemplo, en el modelo de un factor del tipo KMV/CM; y, finalmente, la tercera es el procedimiento para constatar que las estimaciones del *CER* de portafolios de crédito al menudeo son, en general, distintas (y en su mayoría superiores) al requerimiento regulatorio establecido por las reglas de capitalización del enfoque más avanzado de IRB.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. La sección 1 presenta las características del portafolio, su técnica de segmentación y la estimación de sus parámetros de riesgo. La sección 2 muestra los resultados obtenidos con el uso de las cópulas gaussiana, *t* de *Student* simétrica, *t* de *Student* generalizada y *t* de *Student* agrupada y sus respectivos análisis de bondad de ajuste. La sección 3 incluye pruebas de contraste para comparar la robustez de los resultados de la metodología con algunos modelos alternativos consagrados en la práctica, tales como el modelo de incumplimiento de KMV/CM, el modelo de matrices de transición y el enfoque más avanzado de IRB propuesto por Basilea II. Finalmente, las conclusiones exponen los resultados más relevantes. Los algoritmos utilizados en las estimaciones aparecen en el Apéndice, al final del documento.

1. Descripción del portafolio y estimación de los parámetros de riesgo

1.1. Descripción y segmentación del portafolio

Con el propósito de enfatizar el sentido práctico de la metodología se considera un portafolio de créditos al menudeo dividido en las tres subclases de activos usualmente identificadas por las instituciones bancarias de México, a saber: las exposiciones aseguradas por la vivienda del acreditado (subportafolio hipotecario), las exposiciones revolventes (subportafolio de tarjetas de crédito) y todas las demás exposiciones (subportafolio de créditos al consumo). La información está referida a las operaciones crediticias en valor en libros registradas por un banco mexicano durante 2006.²

Debido a que el número de exposiciones es considerablemente grande y a que, en consecuencia, es casi imposible modelar los incumplimientos por cuenta individual, utilizamos la técnica de segmentación *Detección de Interacción Automática Ji-Cuadrada* (CHAID) para homogeneizar los productos en grupos de créditos de acuerdo con su perfil de riesgo. La técnica es una de

² Por razones de confidencialidad se ha decidido mantener en secreto el origen de la fuente de información. Esta limitación no afecta, sin embargo, el alcance de los resultados ya que el método propuesto puede replicarse sin ninguna pérdida de generalidad en cualquier institución financiera.

las más socorridas en la literatura no sólo por su economía de procedimiento sino, fundamentalmente, por su notable flexibilidad para identificar divisiones óptimas cuando las variables son continuas, nominales e incluso categóricas (Biggs, 1991). En conformidad con CHAID, las trayectorias descritas por las variables independientes a lo largo de los árboles de decisión permiten dividir a la población en grupos significativamente diferentes de acuerdo con alguna variable clave propuesta.

La tabla 1 muestra los resultados de la segmentación al utilizar a *PD* como variable clave y al producto, número de pagos vencidos, tiempo en libros, uso de línea de crédito y morosidad observada como variables independientes.³ El portafolio resultante de la segmentación arroja 62 subgrupos (o cubetas) repartidos en 10 productos, cada uno con sus respectivos volúmenes (números de cuentas) y montos de exposición (saldos en pesos).

TABLA 1. PRODUCTOS Y SUBGRUPOS DEL PORTAFOLIO DE CRÉDITOS

Producto	Subgrupos	Volumen (# cuentas)	Exposición (MXN)
A	4	2,077	\$ 52,369,300
B	6	455,902	\$ 1,913,675,323
C	9	25,465	\$ 1,343,202,349
D	8	265,835	\$ 16,304,975,098
E	5	90,373	\$ 1,015,491,658
F	7	92,361	\$ 387,029,421
G	12	2,206,829	\$ 33,518,889,702
H	4	9,451	\$ 5,845,773,697
I	3	20,642	\$ 10,976,303,005
J	4	7,897	\$ 796,397,845
Total	62	3,176,832	\$ 72,154,107,399

Fuente: Elaboración propia.

Nota: Los datos del producto G constituyen el límite de la línea de crédito.

1.2. Estimación de los parámetros de riesgo

Para estimar los parámetros de riesgo del portafolio segmentado es menester hacer algunas precisiones sobre el tipo de notación y método de cómputo. En particular se denomina a $i=1, \dots, M$ los grupos o cubetas en los que se divide el portafolio ($M=62$); $t=1, \dots, n$ las fechas de observación; $j=1, \dots, N_{it}$ los créditos y $e_{it}^{(j)}$ su exposición; $Y_{it}^{(j)}$ la indicadora del incumplimiento para cada crédito j dentro de una ventana anual a partir de la fecha de observación y, finalmente, $ead_{it}^{(j)}$ el saldo de dicho crédito al momento de su incumplimiento. El cómputo de los parámetros por grupos o productos considera, por su parte, las siguientes especificaciones:

³ Las variables seleccionadas son ampliamente utilizadas por los practicantes de la industria (véase RMA, 2004). Cabe aclarar, sin embargo, que el objetivo de la metodología no depende del método de segmentación ni de las variables claves intervinientes: la validez de su aplicabilidad es independiente de las técnicas de segmentación empleadas.

- **Probabilidad de incumplimiento del grupo i (PD_i).** En el cálculo de PD_i se utiliza como estimador a la tasa de incumplimiento observada, TI_{it} correspondiente a la ventana anual t (vista a partir de la fecha de observación t) en el grupo i ; es decir:

$$\widehat{TI}_{it} = \frac{n_{it}}{N_{it}}, \quad (1)$$

donde $n_{it} = \sum_{j=1}^{N_{it}} Y_{it}^{(j)}$ es el número de incumplimientos observado en la correspondiente ventana de observación y TI_{i1}, \dots, TI_{in} las realizaciones de PD_i para cada cubeta $i=1, \dots, M$.

- **Exposición al momento del incumplimiento del grupo i (EAD_i).** Por razones de simplicidad se seguirá la práctica extendida de estimar este parámetro mediante el uso de la *proxy* CCF_i , o factor de conversión de crédito, que es definido como la proporción perdida de la exposición inicial de los créditos al momento del incumplimiento. El estimador insesgado de CCF_i para la ventana de observación t está dado por:

$$\widehat{CCF}_{it} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{it}} ead_{it}^{(j)} Y_{it}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{N_{it}} e_{it}^{(j)} Y_{it}^{(j)}}. \quad (2)$$

- **Pérdida dado el incumplimiento por producto (LGD_p).** En el cálculo de este parámetro se analiza el comportamiento de las recuperaciones de los créditos que incumplen exactamente en cada fecha de observación. Y para eso es importante definir para cada producto p el porcentaje que se recupera del saldo ead_{pt} de todos los créditos incumplidos en t durante los primeros k meses posteriores (ventana de recuperación); de otra manera no se podría calcular la correspondiente tasa de recuperación τ_{pt} . En caso que se incluyan los costos fijos c_p en el proceso de recuperación de cada producto p , el estimador de τ_{pt} estaría dado por:

$$\widehat{\tau}_{pt} = \sum_{\tau=1}^k \frac{1 - c_p}{(1 + r)^\tau} \frac{R_{pt}^{(\tau)}}{ead_{pt}}, \quad (3)$$

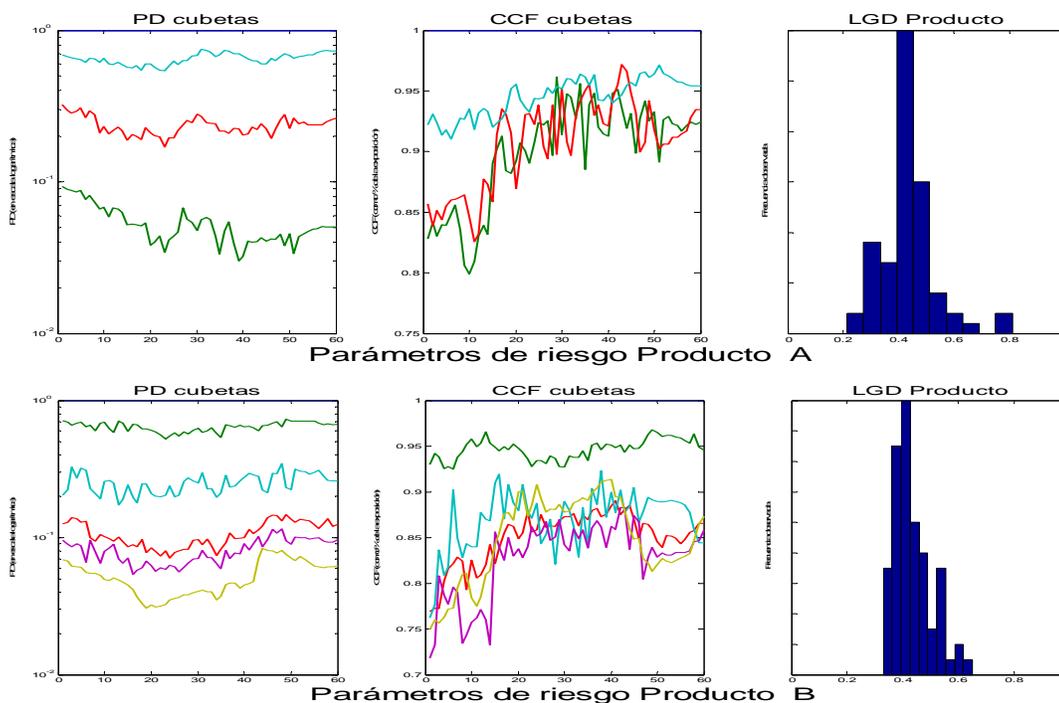
donde $R_{pt}^{(\tau)}$ es la recuperación del mes τ correspondiente a los créditos del producto $p=1, \dots, K$ que incumplieron en t ; $c_{ik}^{(j)}$ es el factor de costos y r es la tasa de interés adecuada para descontar los flujos. Con el cálculo de τ_{pt} se puede obtener, para cada fecha de observación $t=1, \dots, n$, el estimador:

$$\widehat{LGD}_{pt} = 1 - \widehat{\tau}_{pt} \quad (4)$$

como una realización de LGD_p o de la pérdida dado el incumplimiento para el producto p en una ventana de recuperación de k meses. En el cómputo suponemos que $k=24$ meses para el caso de los subportafolios de consumo y tarjetas de créditos y $k=36$ meses para el de hipotecario. Los tamaños de las ventanas de recuperación son fijados a conveniencia para que las estimaciones \hat{r}_{pt} se estabilicen a partir de k o más observaciones.

Los resultados de la consolidación de los parámetros de riesgo para los productos A y B son expuestos, a manera de ilustración, en los recuadros de la figura 1. Ahí se muestran las estimaciones históricas de PD y CCF de todas las cubetas así como los histogramas de LGD_p . Como era de esperarse en un portafolio segmentado, los gráficos revelan una acentuada diferenciación de los valores de PD por cubeta y, en particular, una marcada heterogeneidad de comportamientos distribucionales entre los histogramas de los dos productos. Estas diferencias alertan sobre la importancia de justificar adecuadamente la estructura de dependencia entre los parámetros ya que, de lo contrario, no habría manera de garantizar una correcta estimación de las medidas de riesgo del portafolio.

FIGURA 1. ESTIMACIONES HISTÓRICAS DE PD (IZQUIERDA), CCF (CENTRO) Y LGD (DERECHA) PARA LOS PRODUCTOS A Y B



Fuente: Elaboración propia.

Para dejar en claro este último punto consideremos, como punto de partida para posteriores comparaciones, el producto agregado linealmente de las estimaciones de PD, EAD y LGD sobre la composición (cubetas y productos) del portafolio para obtener las pérdidas históricas (calculadas como porcentaje de saldo) y, en seguida, evaluemos la calidad de las medidas de riesgo.⁴ De acuerdo con los datos desplegados en la Tabla 2 y Figura 2 lo primero que se observa es que el ajuste lineal no arroja estimaciones empíricas robustas sobre el VaR_q y las pérdidas por producto y portafolio. Y es que al revisar las últimas tres columnas de la Tabla 2 se puede apreciar que los valores de VaR_q resultan insensibles a los diferentes niveles de confianza, indicando que éstos son estimadores sesgados de las pérdidas extremas del portafolio debido a que subestiman la cola de la distribución subyacente de pérdidas. La irregularidad en el comportamiento de las pérdidas, ilustrada en los histogramas de la Figura 2, confirma la pobre calidad de las estimaciones.⁵

TABLA 2. ESTIMACIONES EMPÍRICAS DE PE Y VaR_q POR PRODUCTO Y PORTAFOLIO TOTAL (BENCHMARK O MÉTODO HISTÓRICO)

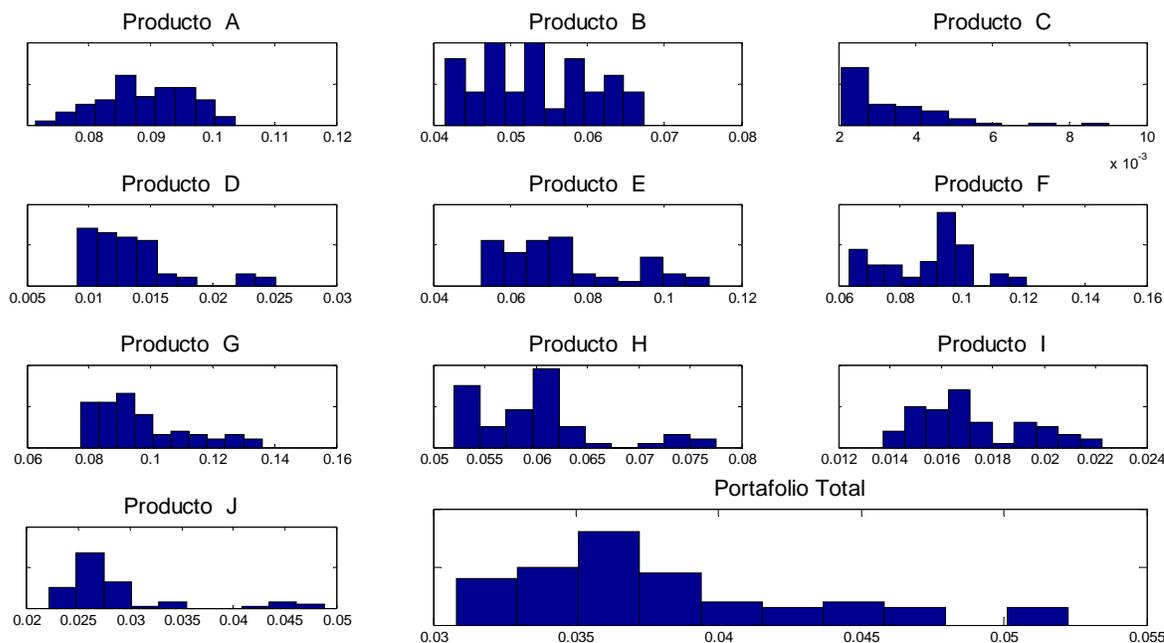
Producto	PE	VaRqEmp			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.87%	10.35%	10.37%	10.37%	10.37%
B	5.31%	6.72%	6.73%	6.73%	6.73%
C	0.34%	0.89%	0.90%	0.90%	0.90%
D	1.34%	2.50%	2.51%	2.51%	2.51%
E	7.35%	11.15%	11.15%	11.15%	11.15%
F	8.95%	12.05%	12.10%	12.10%	12.10%
G	9.56%	12.92%	12.93%	12.93%	12.93%
H	5.99%	7.76%	7.76%	7.76%	7.76%
I	1.71%	2.23%	2.23%	2.23%	2.23%
J	2.88%	4.88%	4.88%	4.88%	4.88%
TOTAL	3.79%	5.21%	5.22%	5.22%	5.22%

Fuente: Elaboración propia.

⁴ Este procedimiento es una aplicación directa e intuitiva de las ecuaciones (8) y (9) descritas con detalle más adelante y que consiste en calcular las pérdidas del portafolio observadas en la muestra. En virtud de que en este cálculo no interviene ningún método de simulación, los valores de las medidas de riesgo pueden considerarse como un *benchmark* histórico mínimo. En las tablas que se presentan a lo largo del documento se ha resaltado en color amarillo el nivel de confianza de 99.5% con el fin de obtener medidas de riesgo para instituciones financieras que aspiran a obtener la más alta calificación crediticia en el país (calificación AAA).

⁵ Una de las razones que explica el irregular comportamiento de los histogramas es, sin duda, el pequeño tamaño de la muestra considerada (60 observaciones).

FIGURA 2. HISTOGRAMAS DE LAS PÉRDIDAS HISTÓRICAS POR PRODUCTO Y PORTAFOLIO TOTAL



Fuente: Elaboración propia.

El ejercicio sugiere, pues, que para establecer la correcta estructura de dependencia entre los parámetros es importante hacer, previamente, tratamientos correctivos en las distribuciones de pérdidas históricas para, luego, aplicar métodos estadísticos sobre los extremos de las colas de una o varias distribuciones conjuntas. La metodología empleada aquí incluye, para el primer caso, densidades kernel de *Epanechnikov* y, para el segundo, cópulas multivariadas y algunas técnicas de la TVE.⁶

⁶ Para una muestra de observaciones x_1, \dots, x_n el estimador de densidad kernel está dado por la función $\hat{f}(x) = \frac{\sum_{j=1}^n K_h(x-x_j)}{n \int K_h(t-x) dt}$, donde $K_h(x) = \left(\frac{1}{h}\right)K\left(\frac{x}{h}\right)$, $K(u) = \left(\frac{3}{4}\right)(1-u^2) \mathbb{1}_{\{|u|<1\}}$ es la función kernel de Epanechnikov y h el ancho de banda.

2. Implementación del método de cálculo del CER

2.1. Distribuciones leptocúrticas y cópulas

Entre las razones más citadas para explicar la poca confiabilidad de los estimadores de VaR_q destaca, sin duda, la conocida leptocurtosis —o colas gordas— que afecta a las distribuciones de pérdidas como las de la Figura 2. La presencia de colas gordas en las distribuciones de créditos es ampliamente conocida y muchas de las explicaciones están centradas, entre otras cosas, en la alta correlación de los movimientos de las exposiciones, que echa por tierra los supuestos de normalidad implícitos en las medidas de valor en riesgo.⁷ La recomendación más usual para atacar este problema es utilizar algún método estocástico alternativo que permita capturar los diferentes comportamientos de las distribuciones marginales afectadas por colas gordas (Ramírez, 2004).

Las cópulas son, sin duda, uno de los recursos más socorridos por los analistas al momento de modelar la estructura de dependencia de esas distribuciones (Bouyé *et al.*, 2000; Embrechts, McNeil y D. Straumann, 2002). El motivo de su popularidad reside en la misma definición pues, como se sabe, se trata de una función que expresa una distribución conjunta de probabilidad como una función de distribuciones marginales. Y eso permite modelar dependencia entre distribuciones que, incluso, son completamente diferentes entre sí. En el caso de portafolios de créditos, el uso de cópulas es todavía más justificado porque los créditos son productos que dependen de eventos conjuntos (como podrían ser las obligaciones de deudas colateralizadas) que son mejor valuados con instrumentos estadísticos que correlacionan las colas de las distribuciones.

En la literatura financiera se han ensayado diversos tipos de cópulas para modelar la probabilidad de que dos mercados caigan en crisis al mismo tiempo pero sin emplear métodos comparativos que justifiquen la elección de la *mejor* distribución subyacente en cada cópula (Kole, Koedijk y Verbeek, 2005). Por esa razón, es conveniente proponer criterios de bondad de ajuste que hagan más objetiva la elección de las familias de cópulas y, de esa manera, evitar su uso indiscriminado y sin fundamento. El primer paso en esa dirección es comparar la capacidad predictiva de las cópulas sobre bases comunes, proponiendo los siguientes supuestos:

- Las estimaciones conjuntas de los parámetros de riesgo $(TI_{il}, CCF_{il})_{i=1}^M, K, (TI_{in}, CCF_{in})_{i=1}^M$ son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) al momento de construir la cópula asociada del vector aleatorio $(PD_i, EAD_i)_{i=1}^M$.

⁷ Suponer normalidad multivariada en distribuciones de exposiciones leptocúrticas tiende a subestimar el valor en riesgo de un portafolio (véase Frey y McNeil, 2003; Hult y Lindskog, 2001)

- Las estimaciones conjuntas $(\widehat{LGD}_{p1})_{p=1}^K, \dots, (\widehat{LGD}_{pm})_{p=1}^K$ son i.i.d en la determinación de la cópula asociada del vector aleatorio $(LGD_p)_{p=1}^K$.
- La correlación serial ocasionada por el traslape de ventanas de observación es despreciable.
- Los parámetros de riesgo PD y CCF son dependientes entre sí y entre cubetas y su estructura de dependencia está dada por la cópula C_p^{PDEAD} . Más precisamente: se supone que el vector aleatorio $2k$ -dimensional

$${}_p PDEAD = (CCF_{i1}, TI_{i1}, K, CCF_{ik}, TI_{ik})' \quad (5)$$

tiene marginales absolutamente continuas, donde $\{i_1, K, i_k\} \subset \{1, K, M\}$ es un conjunto de cubetas que forman alguno de los $p=1, \dots, K$ productos independientes entre sí.

- A nivel de agregación por productos, el vector aleatorio K -dimensional

$$LGD = (LGD_{1,K}, LGD_K)' \quad (6)$$

está definido por marginales absolutamente continuas y alguna cópula asociada C^{LGD} .

- El vector aleatorio $(LGD_p)_{p=1}^K$ es independiente de los parámetros de riesgo $(PD_i, EAD_i)_{i=1}^M$.

2.2. Comparación entre ajustes de cópulas

El segundo paso consiste en adoptar una estrategia de comparación gradual. Es decir, hacer uso, primero, de las estructuras más simples, como las de independencia y gaussiana y, luego, comparar sus resultados con el de otras familias de cópulas más complejas que incorporan efectos conjuntos de dependencia extrema. La idea es ir descartando pormenorizadamente las razones por las que las cópulas ofrecen ajustes más pobres o tienen mayor capacidad predictiva que otras. Para tal efecto empezaremos por ajustar el primer tipo de cópulas a los datos de los parámetros de riesgo PD y CCF , suponiendo que LGD es constante e igual a su media histórica y que el estimador de la matriz de correlaciones de la cópula gaussiana es:⁸

⁸ Véase Frey (2003). Suponer a LGD como constante es sólo un recurso heurístico para considerar las condiciones más elementales sobre las que se estiman las medidas de riesgo con las cópulas gaussiana y de independencia. El relajamiento posterior de este supuesto permitirá observar, por comparación, su importancia en la estimación del riesgo.

$$\hat{\Sigma} = \left(\sum_{k=1}^n y_k y_k' \right)_{ij} \quad (7)$$

donde $y_k = (\Phi^{-1}(\hat{F}_1(x_{ik})), \dots, \Phi^{-1}(\hat{F}_d(x_{dk})))'$ y \hat{F}_i es la función de distribución empírica del vector de observaciones $(x_{i1}, \dots, x_{in})'$ de la variable aleatoria X_i , para cada $i=1, \dots, d$. En todos los ajustes marginales el ancho de banda es fijado por la regla de Silverman.⁹

Los ajustes resultantes de aplicar las cópulas de independencia y gaussiana (ver Tablas 3 y 4) no presentan mejora alguna respecto de su *benchmark* o método histórico, ya que no obstante que los nuevos valores de *PE* muestran poca sensibilidad a los dos modelos de estructura de dependencia, las simulaciones empíricas de *VaR_q* (columnas *VaRqEmp* de la Tabla 2) son ostensiblemente superiores. Esto quiere decir que las distribuciones de pérdidas simuladas con los ajustes de las cópulas de independencia y gaussiana adolecen aún de mayores problemas que su *benchmark* al subestimar las colas de las distribuciones de pérdidas subyacentes en cada producto y portafolio total. Efectivamente, como se destaca en el último renglón de las Tablas 3 y 4, los valores de *VaR_q* para un nivel de 99% de confianza son relativamente menores con las cópulas de independencia y gaussiana (4.27 y 5.04%. respectivamente) que con el método histórico (5.21%).

TABLA 3. ESTIMACIONES DE *PE* Y *VAR_q* AJUSTANDO LA CÓPULA DE INDEPENDENCIA A *PD* Y *CCF* DEL PORTAFOLIO.

Producto	PE	VaRqEmp			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.91%	10.61%	10.79%	11.20%	11.32%
B	5.37%	6.58%	6.67%	6.96%	7.01%
C	0.38%	1.05%	1.15%	1.31%	1.35%
D	1.36%	1.83%	1.88%	2.00%	2.04%
E	7.36%	11.48%	11.87%	12.65%	12.80%
F	8.88%	10.76%	10.99%	11.37%	11.61%
G	9.73%	11.72%	11.93%	12.42%	12.65%
H	6.00%	7.65%	7.74%	7.89%	7.96%
I	1.73%	2.30%	2.35%	2.46%	2.51%
J	2.87%	4.39%	4.52%	4.84%	4.93%
TOTAL	3.83%	4.27%	4.33%	4.43%	4.47%

Fuente: Elaboración propia.

⁹ Esta regla permite determinar un ancho de banda h óptimo (para ajustar densidades normales) mediante la fórmula $(40\sqrt{\pi/n})^{1/5} \hat{\sigma}$, donde n es el número de observaciones y $\hat{\sigma}$ la volatilidad estimada.

TABLA 4. ESTIMACIONES PE Y VAR_Q AJUSTANDO UNA CÓPULA GAUSSIANA A PD Y CCF DEL PORTAFOLIO

Producto	PE	VaR _Q Emp			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.92%	10.33%	10.52%	10.85%	10.93%
B	5.36%	6.82%	6.96%	7.17%	7.21%
C	0.37%	0.94%	1.02%	1.14%	1.21%
D	1.37%	2.41%	2.51%	2.68%	2.72%
E	7.41%	12.25%	12.66%	13.55%	14.01%
F	8.94%	12.07%	12.41%	13.11%	13.19%
G	9.74%	13.52%	13.83%	14.55%	14.73%
H	6.00%	7.43%	7.51%	7.72%	7.74%
I	1.72%	2.19%	2.24%	2.34%	2.36%
J	2.88%	4.60%	4.69%	4.86%	4.93%
TOTAL	3.84%	5.04%	5.17%	5.39%	5.42%

Fuente: Elaboración propia.

Una sugerencia para corregir la subestimación en las distribuciones de pérdidas afectadas por leptocutosis es tratar con cópulas cuyas marginales regulen la *pesadez* de la colas como, en efecto, sucede con las familias *t* de Student (Ramírez, 2004). De entre las más socorridas por su flexibilidad y buen desempeño en aplicaciones de medición de riesgos destacan las cópulas *t* de Student simétricas (ver Embrechts, McNeil y Straumann, 2002).¹⁰ De acuerdo con la Tabla 5, la aplicación de esta cópula mejora las estimaciones del VaR_Q de los dos ajustes anteriores al arrojar resultados más cercanos que los obtenidos por el método histórico. Así tenemos, por ejemplo que para un nivel de confianza del 99%, el cuantil de la distribución de pérdidas del portafolio total es de 5.33%, esto es: una cifra apenas superior a su contraparte histórica de la Tabla 2.

¹⁰ Al ajustar esta cópula se asumen los mismos supuestos sobre LGD y las densidades kernel. La matriz de correlaciones se estima con la ecuación (7) tomando $y_k = \left(t_{\alpha}^{-1}(\hat{F}_1(x_{ik})), K, t_{\alpha}^{-1}(\hat{F}_d(x_{dk})) \right)'$, donde t_{α} denota la distribución univariada de Student cuyo parámetro de grados de libertad α es estimado con el algoritmo I del Apéndice.

TABLA 5. ESTIMACIONES DE PE Y VAR_q AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT SIMÉTRICA PD Y CCF DEL PORTAFOLIO

Producto	PE	VaR _q Emp			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.90%	10.94%	11.12%	11.49%	11.73%
B	5.36%	7.19%	7.32%	7.61%	7.67%
C	0.37%	0.98%	1.08%	1.21%	1.25%
B	1.36%	2.56%	2.69%	2.84%	2.87%
C	7.37%	12.77%	13.35%	14.07%	14.42%
B	8.90%	12.62%	13.05%	13.66%	13.93%
C	9.70%	14.18%	14.49%	15.30%	15.47%
B	6.00%	7.80%	7.91%	8.13%	8.17%
C	1.72%	2.27%	2.34%	2.46%	2.48%
B	2.87%	4.79%	4.91%	5.08%	5.14%
TOTAL	3.82%	5.33%	5.46%	5.68%	5.78%

Fuente: Elaboración propia.

Las dificultades encontradas en las estimaciones anteriores del VaR_q no quedan, sin embargo, completamente superadas con la introducción de la cópula t de Student simétrica. Falta, todavía, determinar los efectos de la asimetría en la estructura de dependencia de los parámetros de riesgo y ponderar los efectos de la constancia del parámetro LGD.¹¹ El primer problema es regularmente enfrentado con el uso de las cópulas elípticas generalizadas y el segundo con el de las cópulas agrupadas (Frahm y Junker, 2003).

En lo que toca a las cópulas elípticas generalizadas cabe destacar que el procedimiento de modelación de la estructura de dependencia de los vectores aleatorios ${}_pPDEAD$ y LGD requiere, inicialmente, de ajustar las cópulas $C_{{}_pPDEAD}$ y C^{LGD} a cada producto p , tal como se especifica en el algoritmo 2 del Apéndice. Luego, es necesario asociar densidades kernel de suavización a las observaciones históricas de PD , EAD y LGD para construir las distribuciones marginales de los parámetros de riesgo contenidos en los vectores anteriores. Finalmente hay que definir las pérdidas (como porcentaje de su saldo) para cada cubeta i como:

$$L_i = TI_i * CCF_i * LGD_i. \quad (8)$$

y simular sus series L_{i1}, K, L_{iN} , para cada cubeta $i \in \{i_1, K, i_k\}$ del producto p con base en las estimaciones ${}_p\widehat{PDEAD}_1, \dots, {}_p\widehat{PDEAD}_N, p = 1, \dots, K$ y

¹¹ Frahm, 2003 encuentra que la presencia de asimetría es importante en la modelación de las estructuras de dependencia de los factores de riesgo de mercado. No encontramos, sin embargo, evidencia de la aplicación de la asimetría para el caso de riesgo de crédito.

$\widehat{\text{LGD}}_1, \dots, \widehat{\text{LGD}}_N$ de los parámetros de riesgo. En la agregación de las pérdidas por producto hay que ponderar el saldo e_i de cada cubeta i por el de cada producto p conforme a la siguiente fórmula:

$$L_{pj} = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} \frac{e_i}{\sum_{j \in \{i_1, \dots, i_k\}} e_j} L_{ij}, \quad j = 1, K, N \quad (9)$$

Como etapa previa al ajuste y con el objeto de evaluar la asimetría en la estructura de dependencia de los parámetros de riesgo es importante aplicar las cópulas elípticas a cada producto, estimando previamente sus grados de dependencia extrema (denotado con el parámetro α). De esta manera se podría contar con índices de dependencia distintos para cada producto y no sólo con un índice para el portafolio total, como sucedía con los anteriores ajustes. La Tabla 6 muestra los estimadores del índice de la cola α asociados con los productos y el portafolio total.¹² Ahí queda claro que las observaciones extremas conjuntas para los parámetros PD y CCF son bastante diferentes entre productos. En particular los productos H y J presentan los menores índices de la cola α , dicho de otra manera, los mayores niveles de dependencia conjunta extrema, mientras que el portafolio exhibe la situación totalmente contraria.

TABLA 6. GRADOS DE LIBERTAD PARA (PD,CCF) POR PRODUCTO Y PORTAFOLIO TOTAL

(PD, CCF)	
Producto	Grados de libertad α_p (Depend. Cola)
A	20.5
B	38.8
C	11.8
D	14.2
E	67.9
F	9.7
G	10.8
H	2.0
I	22.1
J	3.2
TOTAL	276.8

Fuente: Elaboración propia.

¹² El índice mide la ocurrencia de observaciones conjuntas extremas de tal suerte que un menor valor de α implica un mayor grado de dependencia entre las observaciones extremas conjuntas.

Las nuevas corridas de los valores agregados de PE y de VaR_q que resultan de ajustar las cópulas t simétrica y generalizada a cada producto e índice de cola α aparecen desplegados en las Tablas 7 y 8. Los valores de PE se calculan como el promedio aritmético de las observaciones obtenidas por simulación Montecarlo mientras que los estimadores de VaR_q son obtenidos por los métodos POT¹³ (Columna VaRqPOT), Empírico (columna VaRqEmp) y distribución Beta (VaRqBeta).¹⁴

TABLA 7. ESTIMACIONES DE PE Y VaR_q POR PRODUCTO AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT SIMÉTRICA A LOS PARÁMETROS DE RIESGO PD Y CCF

Producto	PE	VaRqPOT				VaRqEmp				VaRqBeta			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.88%	10.93%	11.15%	11.57%	11.72%	10.91%	11.19%	11.58%	11.80%	10.85%	11.08%	11.56%	11.75%
B	5.33%	7.27%	7.41%	7.63%	7.70%	7.28%	7.40%	7.59%	7.64%	7.40%	7.65%	8.18%	8.39%
C	0.38%	1.01%	1.12%	1.36%	1.46%	1.03%	1.13%	1.33%	1.38%	0.79%	0.85%	0.98%	1.03%
D	1.36%	2.55%	2.68%	2.89%	2.95%	2.56%	2.67%	2.90%	2.96%	2.30%	2.43%	2.70%	2.81%
E	7.39%	12.98%	13.58%	14.62%	14.95%	13.00%	13.49%	14.56%	14.82%	12.00%	12.59%	13.85%	14.36%
F	8.97%	12.73%	13.14%	13.92%	14.19%	12.78%	13.19%	13.88%	14.06%	12.77%	13.24%	14.22%	14.61%
G	9.59%	13.90%	14.36%	15.17%	15.43%	13.86%	14.37%	15.31%	15.57%	13.22%	13.66%	14.58%	14.95%
H	6.00%	7.91%	8.03%	8.20%	8.23%	7.86%	8.00%	8.20%	8.26%	7.51%	7.69%	8.06%	8.20%
I	1.72%	2.29%	2.35%	2.45%	2.49%	2.28%	2.33%	2.45%	2.49%	2.28%	2.35%	2.49%	2.55%
J	2.88%	4.93%	5.06%	5.24%	5.27%	4.89%	5.02%	5.22%	5.28%	4.30%	4.48%	4.86%	5.02%

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 8. ESTIMACIONES DE PE Y VaR_q POR PRODUCTO AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT GENERALIZADA A LOS PARÁMETROS DE RIESGO PD Y CCF

Producto	PE	VaRqPOT				VaRqEmp				VaRqBeta			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.88%	11.05%	11.35%	12.00%	12.26%	11.05%	11.39%	12.08%	12.25%	10.83%	11.05%	11.53%	11.71%
B	5.33%	7.32%	7.50%	7.83%	7.94%	7.27%	7.48%	7.84%	7.94%	7.39%	7.64%	8.17%	8.38%
C	0.38%	1.04%	1.18%	1.55%	1.71%	1.06%	1.17%	1.43%	1.64%	0.79%	0.85%	0.98%	1.04%
D	1.36%	2.57%	2.70%	2.92%	2.99%	2.60%	2.72%	2.93%	2.99%	2.30%	2.43%	2.70%	2.81%
E	7.39%	13.14%	13.84%	15.14%	15.58%	13.19%	13.91%	15.18%	15.68%	11.96%	12.54%	13.78%	14.29%
F	8.97%	12.79%	13.24%	14.10%	14.40%	12.83%	13.27%	14.03%	14.34%	12.74%	13.19%	14.17%	14.56%
G	9.59%	13.88%	14.36%	15.24%	15.54%	13.83%	14.43%	15.35%	15.70%	13.21%	13.65%	14.57%	14.94%
H	6.00%	7.92%	8.04%	8.20%	8.24%	7.86%	7.98%	8.18%	8.27%	7.51%	7.68%	8.05%	8.20%
I	1.72%	2.38%	2.47%	2.66%	2.72%	2.42%	2.48%	2.62%	2.69%	2.28%	2.35%	2.49%	2.55%
J	2.88%	4.94%	5.08%	5.25%	5.29%	4.90%	5.03%	5.21%	5.29%	4.30%	4.48%	4.86%	5.02%

Fuente: Elaboración propia.

Al comparar los ajustes de las dos cópulas por producto y nivel de confianza encontramos que las estimaciones de VaR_q son bastante parecidas en ambos casos o, dicho en otras palabras, que las especificaciones de asimetría dadas por las cópulas elípticas generalizadas (Tabla 7) tienen un impacto casi nulo en la modelación de la estructura de dependencia de PD y CCF. Pero esto no quiere decir que el procedimiento introducido haya sido estéril. Al contrario, el cálculo de los índices de la cola α por producto mejora

¹³ Para revisar los resultados más importantes de este método derivado de la TVE véase Embrechts, Klüppelberg y Mikosch, 1997.

¹⁴ Con excepción del método POT, los otros dos son ampliamente utilizados en los análisis de riesgo de crédito. Así que una comparación entre ellos es una buena oportunidad para comprobar las bondades del nuevo método.

sensiblemente las estimaciones empíricas de VaR_q de las dos últimas tablas con relación a las de la Tabla 5. El análisis de la dependencia conjunta extrema por producto permite, de hecho, capturar efectos particulares sobre las medidas de riesgo que pasan inadvertidos cuando se utiliza un solo índice de cola para todo el portafolio.

Para profundizar más en este último punto introduciremos como instrumento de comparación a la cópula t de *Student* agrupada que se distingue no sólo por su capacidad de relacionar grupos de variables aleatorias sino, fundamentalmente, por mantener la diferenciación de eventos extremos entre grupos. La aplicación de esta cópula a los parámetros de riesgo PD y CCF del portafolio total incorpora la matriz de correlaciones P y los estimadores de los parámetros con a_p grados de libertad para cada producto p de acuerdo con el paso (i) del algoritmo 2 (véase Apéndice). Los resultados de la agregación de las pérdidas simuladas $\left(\sum_{p=1}^K PDEAD\right)$ por producto y portafolio total se exhiben en la Figura 3 donde se muestran los histogramas de las distribuciones de pérdidas.

Al comparar la forma de los histogramas de las Figuras 2 y 3 resalta, al menos visualmente, la mayor área de la cola derecha de las distribuciones de pérdidas producida por las cópulas que modelan la dependencia conjunta extrema; lo cual quiere decir que con este tipo de cópulas es posible observar pérdidas superiores que son inapreciables en las estimaciones históricas de los parámetros de riesgos. Los efectos benéficos de esta mayor capacidad se traducen en dos ventajas sobre las anteriores dos cópulas: la posibilidad de materializar las mejores estimaciones de PE y VaR_q en una medida de agregación total y la oportunidad de medir los beneficios por diversificación del portafolio.

En lo que corresponde a la primera ventaja, hay poco que agregar: la Tabla 9 proporciona estimaciones de riesgo para el portafolio total que las tablas 7 y 8 —donde se exponen los resultados de las dos cópulas anteriores— no proveen.¹⁵ Y esa es una diferencia muy importante. La otra ventaja se descubre al analizar los últimos dos renglones de la Tabla 9, donde se incluye, respectivamente, la suma aritmética del VaR_q marginal de todos los productos ponderada por el saldo total (Total pond rho = 1) y la raíz de la suma de los cuadrados de VaR_q (Total pond rho = 0).¹⁶ En efecto, al comparar las estimaciones de VaR_q del portafolio total al 99.5% con la suma aritmética de VaR_q 's individuales se obtiene una diferencia promedio de alrededor de 0.4%, que es precisamente el beneficio por diversificación.

¹⁵ Las estimaciones de PE y VaR_q por producto obtenidas con la cópula t de *Student* agrupada son muy parecidas a las desplegadas por las dos tablas anteriores debido a que se emplea una cópula t simétrica para cada producto en los tres ajustes. La diferencia es que, por construcción, la cópula t agrupada ofrece una medida consolidada del riesgo que no es posible derivar de las dos anteriores cópulas, que fueron ajustadas por producto.

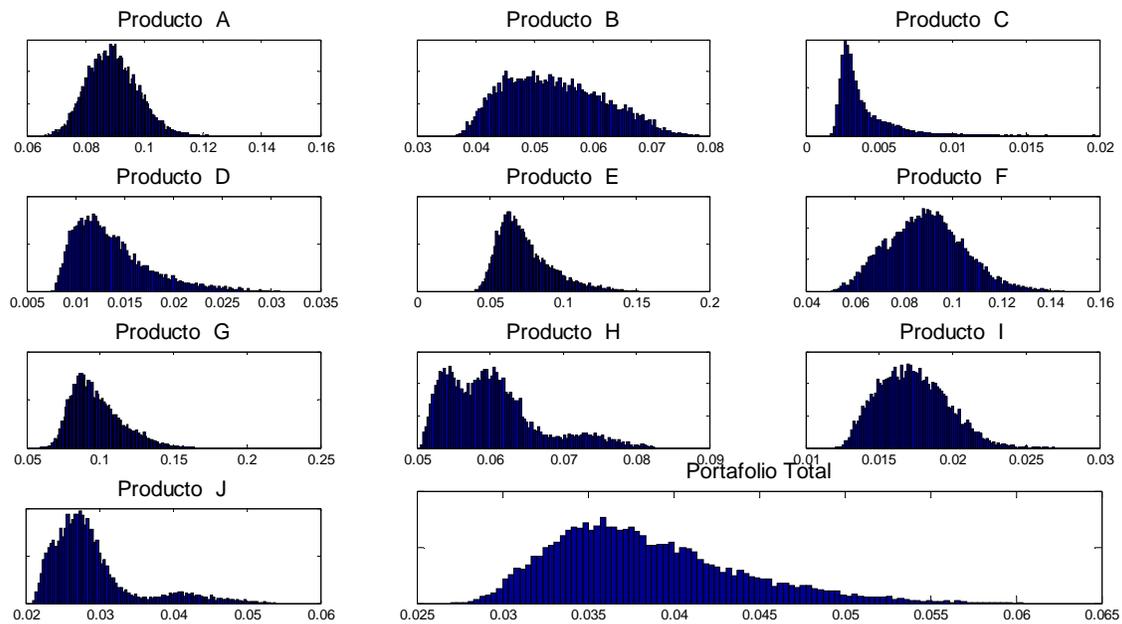
¹⁶ El cálculo de "Total pond rho = 0" supone que las pérdidas entre productos son independientes.

TABLA 9. ESTIMACIONES DE PE Y VAR_Q POR PRODUCTO Y PORTAFOLIO TOTAL AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT AGRUPADA A LOS PARÁMETROS DE RIESGO PD Y CCF

Producto	PE	VaRqPOT				VaRqEmp				VaRqBeta			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	8.93%	10.99%	11.21%	11.63%	11.78%	11.00%	11.23%	11.54%	11.71%	10.96%	11.19%	11.69%	11.88%
B	5.35%	7.23%	7.37%	7.58%	7.65%	7.23%	7.36%	7.57%	7.62%	7.42%	7.67%	8.20%	8.42%
C	0.38%	1.01%	1.12%	1.36%	1.46%	1.03%	1.11%	1.28%	1.38%	0.80%	0.86%	1.00%	1.05%
D	1.37%	2.56%	2.69%	2.89%	2.96%	2.58%	2.68%	2.89%	2.95%	2.34%	2.47%	2.75%	2.87%
E	7.37%	13.01%	13.57%	14.49%	14.76%	13.07%	13.51%	14.61%	14.91%	11.97%	12.56%	13.82%	14.32%
F	8.92%	12.76%	13.17%	13.94%	14.20%	12.83%	13.21%	13.95%	14.15%	12.86%	13.35%	14.37%	14.78%
G	9.73%	14.43%	14.89%	15.69%	15.94%	14.44%	14.88%	15.70%	16.02%	13.85%	14.36%	15.42%	15.84%
H	6.01%	7.88%	8.00%	8.16%	8.19%	7.82%	7.98%	8.16%	8.21%	7.52%	7.69%	8.06%	8.21%
I	1.73%	2.30%	2.37%	2.50%	2.55%	2.31%	2.37%	2.50%	2.57%	2.30%	2.37%	2.52%	2.57%
J	2.89%	4.86%	5.01%	5.22%	5.27%	4.85%	4.98%	5.24%	5.29%	4.30%	4.48%	4.86%	5.01%
TOTAL	3.84%	5.36%	5.52%	5.80%	5.89%	5.36%	5.53%	5.83%	5.90%	5.15%	5.31%	5.64%	5.78%
Total pond rho=1	3.84%	5.71%	5.90%	6.20%	6.30%	5.72%	5.89%	6.20%	6.32%	5.46%	5.67%	6.10%	6.27%
Total pond rho=0		2.90%	2.99%	3.15%	3.20%	2.90%	2.99%	3.15%	3.21%	2.78%	2.88%	3.09%	3.18%

Fuente: Elaboración propia.

FIGURA 3. HISTOGRAMAS DE LAS PÉRDIDAS SIMULADAS POR PRODUCTO Y PORTAFOLIO TOTAL AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT AGRUPADA A LOS PARÁMETROS PD Y CCF



2.3. Pruebas de bondad de ajuste

Para establecer estadísticamente la bondad de ajuste de cada cópula se emplea el estadístico Q de formas bilineales propuesto por Panchenko, 2005. Este estadístico es una medida de discrepancia entre la cópula empírica y alguna otra familia de cópulas empleada, en la que valores pequeños indican un mejor ajuste de estas últimas. En la Tabla 9 se presentan los valores promedio de las distancias Q por producto y portafolio total.¹⁷

TABLA 9. DISTANCIAS Q (ESTADÍSTICA DE PRUEBA) PARA CADA TIPO DE CÓPULAS AJUSTADO

Producto	Cópula Independencia portafolio total	Cópula Gaussiana portafolio total	Cópula t Simétrica portafolio total	Cópula t Simétrica por producto	Cópula t Generalizada por producto	Cópula t Agrupada
A	0.10415	0.07264	0.04061	0.04016	0.04069	0.03980
B	0.09646	0.06839	0.03817	0.03786	0.03793	0.03670
C	0.09191	0.06615	0.03667	0.03662	0.03669	0.03600
D	0.09699	0.06858	0.03841	0.03791	0.03807	0.03700
E	0.10004	0.07006	0.03916	0.03866	0.03886	0.03810
F	0.09482	0.06797	0.03774	0.03752	0.03754	0.03670
G	0.09040	0.06519	0.03615	0.03612	0.03612	0.03580
H	0.10676	0.07413	0.04152	0.04152	0.04134	0.03970
I	0.11059	0.07632	0.04255	0.04275	0.04463	0.04080
J	0.10658	0.07577	0.04206	0.04213	0.04223	0.04110
TOTAL	0.08873	0.06400	0.03549	0.03549	0.03549	0.03460

Fuente: Elaboración propia.

Los valores de la estadística de prueba Q revelan que mientras la cópula t de Student agrupada es la que ofrece el mejor ajuste a los datos con respecto a la cópula empírica de los parámetros de riesgo, las de independencia y gaussiana presentan los ajustes más pobres de todas las familias de cópulas utilizadas. Las diferencias son notorias pues los valores de Q para estas dos últimas cópulas resultan ser de más del doble que las registradas para la t agrupada: un resultado que da pie a pensar que si se modela la estructura de dependencia de PD y CCF con la cópula t de Student agrupada y se elimina el supuesto de constancia de LGD, es posible obtener mejores estimaciones de ES_q y VaR_q que con los ajustes anteriores.

Los resultados parecen confirmar tal presunción, en particular cuando se le asocia a LGD la cópula t de Student simétrica, pues como se puede apreciar en las tablas 10 y 11 las estimaciones obtenidas por el método POT resultan

¹⁷ En la literatura existen diversas pruebas de bondad de ajuste para cópulas, sin embargo, la mayoría están diseñadas para el caso bidimensional, o bien, para dimensiones pequeñas. Más aún, son pocas aquellas en las que su implementación es independiente de las funciones de distribución marginales. La propuesta de Panchenko, 2005 es una prueba no paramétrica bastante robusta que ofrece solución a los puntos anteriores. Si embargo-, el comportamiento distribucional de la estadística Q aún está en desarrollo por lo que el p-value asociado debe obtenerse por técnicas de bootstrapping.

más consistentes y confiables para niveles de q cercanos a 1 que aquellas registradas por los valores históricos de la Tabla 2.¹⁸

TABLA 10. ESTIMACIONES DE PE Y VAR_q AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT AGRUPADA A LOS PARÁMETROS PD Y CCF , Y UNA CÓPULA T DE STUDENT A LA LGD

Producto	PE	VaRqPOT				VaRqEmp				VaRqBeta			
		99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	9.01%	14.03%	14.79%	16.45%	17.13%	13.99%	14.86%	16.79%	17.76%	13.46%	14.01%	15.19%	15.66%
B	5.48%	9.73%	10.20%	11.07%	11.37%	9.68%	10.17%	11.03%	11.46%	9.45%	9.97%	11.09%	11.55%
C	0.43%	2.00%	2.29%	2.85%	3.06%	2.09%	2.35%	2.73%	2.85%	1.46%	1.63%	2.03%	2.21%
D	1.41%	3.25%	3.52%	4.10%	4.32%	3.25%	3.57%	4.10%	4.26%	2.98%	3.20%	3.70%	3.90%
E	7.61%	17.55%	19.00%	21.89%	22.96%	17.44%	19.16%	22.11%	22.77%	15.74%	16.86%	19.28%	20.26%
F	9.02%	15.90%	16.66%	18.09%	18.57%	15.81%	16.73%	18.24%	18.73%	15.63%	16.48%	18.32%	19.06%
G	9.83%	15.51%	16.09%	17.13%	17.46%	15.53%	16.12%	17.28%	17.56%	14.86%	15.48%	16.80%	17.33%
H	6.09%	11.83%	12.46%	13.68%	14.12%	11.77%	12.37%	13.80%	14.40%	11.63%	12.38%	14.00%	14.66%
I	1.78%	3.49%	3.66%	3.99%	4.10%	3.50%	3.64%	4.04%	4.16%	3.79%	4.08%	4.71%	4.97%
J	3.03%	7.79%	8.58%	10.32%	11.03%	7.67%	8.51%	10.53%	11.15%	6.96%	7.54%	8.80%	9.33%
TOTAL	3.91%	5.95%	6.21%	6.74%	6.93%	5.95%	6.19%	6.72%	7.03%	5.76%	5.99%	6.49%	6.69%
Total pond rho=1	3.90%	7.23%	7.62%	8.39%	8.66%	7.22%	7.63%	8.45%	8.70%	6.98%	7.40%	8.30%	8.66%
Total pond rho=0		3.41%	3.57%	3.88%	3.99%	3.41%	3.57%	3.91%	4.01%	3.29%	3.47%	3.84%	3.99%

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 11. ESTIMACIONES DE ES_q AJUSTANDO UNA CÓPULA T DE STUDENT AGRUPADA A LOS PARÁMETROS PD Y CCF , Y UNA CÓPULA T DE STUDENT A LA LGD

Producto	ESqPOT				ESqEmp				ESqBeta			
	99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
A	15.09%	15.81%	17.40%	18.04%	15.09%	15.81%	17.67%	18.30%	14.23%	14.74%	15.85%	16.34%
B	10.34%	10.73%	11.45%	11.69%	10.32%	10.74%	11.50%	11.77%	10.17%	10.66%	11.73%	12.22%
C	2.38%	2.63%	3.13%	3.31%	2.41%	2.60%	2.90%	3.01%	1.71%	1.88%	2.31%	2.48%
D	3.62%	3.88%	4.40%	4.61%	3.63%	3.86%	4.37%	4.59%	3.29%	3.51%	4.01%	4.21%
E	19.48%	20.76%	23.31%	24.25%	19.57%	20.81%	23.09%	23.78%	17.30%	18.36%	20.66%	21.66%
F	16.88%	17.52%	18.71%	19.11%	16.92%	17.61%	18.74%	19.01%	16.82%	17.62%	19.36%	20.12%
G	16.25%	16.72%	17.55%	17.82%	16.30%	16.81%	17.57%	17.76%	15.72%	16.30%	17.55%	18.10%
H	12.66%	13.20%	14.25%	14.63%	12.64%	13.26%	14.43%	14.75%	12.67%	13.38%	14.93%	15.62%
I	3.72%	3.86%	4.14%	4.24%	3.71%	3.86%	4.17%	4.26%	4.19%	4.47%	5.11%	5.37%
J	8.90%	9.65%	11.33%	12.02%	8.94%	9.79%	11.43%	12.05%	7.77%	8.32%	9.59%	10.11%
TOTAL	6.30%	6.53%	7.00%	7.17%	6.29%	6.50%	7.08%	7.34%	6.08%	6.30%	6.79%	6.99%
Total pond rho=1	7.75%	8.09%	8.75%	8.99%	7.76%	8.11%	8.77%	8.98%	7.56%	7.95%	8.83%	9.21%
Total pond rho=0	3.62%	3.76%	4.02%	4.11%	3.63%	3.77%	4.03%	4.11%	3.53%	3.70%	4.06%	4.22%

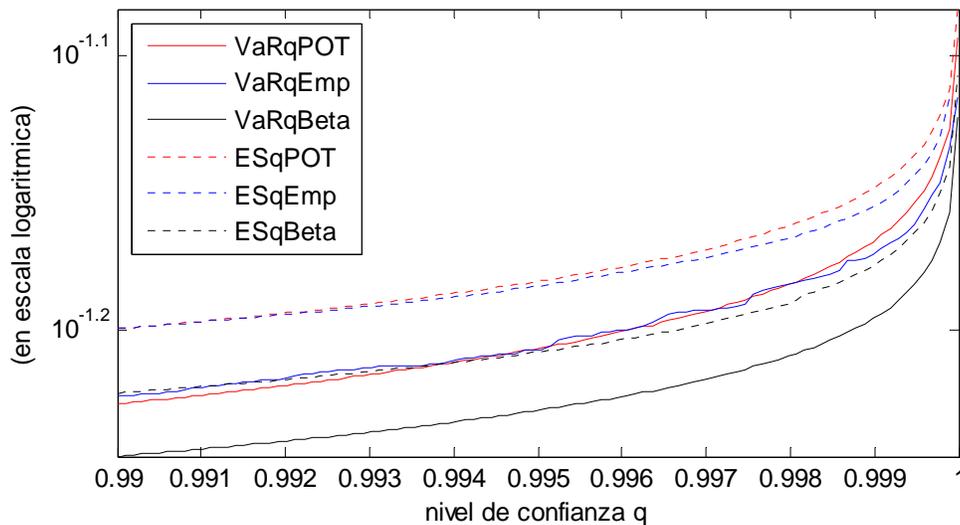
Fuente: Elaboración propia.

La explicación a esta mejora reside en las propiedades asintóticas que adquieren los estimadores de Var_q y ES_q cuando se calibra el método POT con niveles de confianza ligeramente inferiores a 100% (Embrechts, Klüppelberg y Mikosh, 1997; Díaz, 2003). En la Figura 4 se presentan las estimaciones de las medidas de riesgo Var_q y ES_q para niveles de confianza comprendidos en el intervalo (0.99, 1) bajo los métodos POT, Empírico y distribución Beta. Las estimaciones basadas en el método POT (en rojo) muestran, por un lado, consistencia con las estimaciones empíricas (en azul) cuando se utilizan niveles de confianza inferiores a 0.999 y, por otro lado, estabilidad frente al estimador empírico para niveles de confianza superiores. Y es que una vez fijado el número de simulaciones, el estimador sólo es consistente para

¹⁸ Con el fin de estresar las distribuciones marginales del modelo, las densidades kernel se ajustan con el doble del ancho de banda empleado en los ejercicios anteriores.

niveles de confianza q inferiores a los que se observan en una muestra finita, lo que produce subestimación del riesgo para valores altos de q . La situación es radicalmente distinta cuando se ajusta una distribución Beta (en negro) a las distribuciones de pérdida ya que en ese caso los valores de VaR_q y ES_q resultan inferiores incluso a sus correspondientes estimadores empíricos con niveles de confianza superiores a 99%.

FIGURA 4. ESTIMACIONES DE VAR_o Y ES_o (MÉTODOS POT, EMPÍRICO Y BETA)
PORTAFOLIO TOTAL



3. Estimaciones del CER y CR bajo modelos tradicionales

Con el fin de probar la metodología propuesta procederemos a comparar sus resultados con los de otros enfoques de medición de riesgo de crédito adoptados por reguladores e instituciones financieras de México en sus análisis de portafolios de consumo. En particular nos concentraremos en los siguientes tres modelos, y en ese orden: el de incumplimiento de un sólo factor del tipo KMV/CM, el del requerimiento de capital regulatorio aceptado por Basilea II (BCBS, 2004) en su enfoque avanzado de calificaciones internas (IRB) y el de matrices de transición.

El modelo del tipo KM/CM es regularmente utilizado para estimar el capital económico de portafolios de créditos revolventes y de consumo (RMA, 2003). Sus parámetros importantes, la correlación de activos (AVC) y de incumplimientos (LC), son usualmente calibrados con información histórica sobre las tasas de incumplimiento. Concretamente, el CER_i (como porcentaje del saldo) de la cubeta i se calcula como:

$$K_i = LGD_i \cdot CCF_i \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i) + \sqrt{AVC_i} \Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1 - AVC_i}}\right) \quad (10)$$

Donde q es el nivel de confianza y PD_i el valor promedio de las correspondientes tasas de incumplimiento observadas.

El IRB de Basilea II emplea, por su parte, resultados asintóticos sobre los cuantiles de la función de pérdidas del portafolio cuando el número de exposiciones es suficientemente grande (Frey y McNeil, 2003). En particular, el IRB estima el requerimiento de capital regulatorio CR_i , para cada cubeta i de créditos homogéneos en perfil de riesgo como:

$$CR_i = LGD_i \cdot CCF_i \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(.999)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (11)$$

Donde el nivel de confianza se fija en $q=.999$ y la correlación de activos ρ está preestablecida según el tipo de portafolio al que pertenezca la cubeta (0.04 para tarjeta de crédito, 0.15 para hipotecario y $.03\left(\frac{1-e^{-35PD_i}}{1-e^{-35}}\right) + .16\left(1 - \frac{1-e^{-35PD_i}}{1-e^{-35}}\right)$ para el portafolio de consumo).

Finalmente, en la versión más simple del modelo de matrices de transición, el CER_p para cada producto p es estimado como:¹⁹

$$CER_p = PE_p + z_q \cdot \sqrt{\sum_{j \in E} CCF_{pj}^{*2} \cdot LGD_{pj}^{*2} \cdot p_{jl}^{*p} \cdot (1 - p_{jl}^{*p})} \quad (12)$$

Donde $PE_p = \sum_{j \in E} p_{jl}^{*p} \cdot CCF_{pj}^* \cdot LGD_{pj}^*$ es la correspondiente pérdida esperada;

p_{jl}^{*p} el estimador de la probabilidad de incumplimiento (anual) de las exposiciones del producto p que tienen j pagos vencidos;²⁰ y CCF_{pj}^* y LGD_{pj}^* los promedios históricos de los parámetros de riesgo CCF y LGD estimados por las ecuaciones (2) y (4), respectivamente, para los créditos del producto p con j pagos vencidos.

Al computar las medidas de CER y CR con cada uno de los modelos se encuentran los siguientes dos resultados: (1) mientras que el modelo de un factor KMV/CM arroja un CER menor que el requerimiento de capital regulatorio estipulado por Basilea II, los porcentajes de CR y CER en ambos modelos son inferiores al CER registrado por la cópula agrupada y (2) el modelo de matrices de transición de pagos vencidos produce estimaciones del

¹⁹ En esta versión se supone que los incumplimientos de las exposiciones totales entre pagos vencidos son independientes entre sí y que las pérdidas tienen distribución normal.

²⁰ La estimación de esta probabilidad de incumplimiento anual se realiza mediante matrices de transición de estados de pagos vencidos que observan la propiedad de Markov. En concreto, si se denota por $p_{ij} = P\{X_t = j | X_{t+1} = i\}$ a la probabilidad de que el crédito pase del estado i al estado j , entonces se supone que (X_t) forma una cadena de Markov con espacio de estados de pagos vencidos $E = \{0, 1, K, N, I\}$, donde el estado I de incumplimiento es absorbente.

CER superiores a los de la cópula t agrupada. La evidencia es expuesta en las Tablas 12 y 13. En la primera se exhiben los valores del CER (medido a través de VaR_q) y CR obtenidos con el modelo de un factor y las reglas de IRB de Basilea II,²¹ así como las estimaciones de VaR_q por el método POT (en donde se consideran densidades kernel con un factor de decaimiento $\lambda=.97$) y en la segunda se hace una comparación de los valores de PE y VaR_q estimados con la metodología propuesta y el modelo de matrices de transición.

TABLA 12. ESTIMACIONES DE CE POR EL MODELO DE UN FACTOR KMV/CM, EL CAPITAL REGULATORIO BAJO EL ENFOQUE IRB DE BASILEA II Y EL CE DEL MODELO CÓPULA T STUDENT AGRUPADA

Producto	Modelo de un factor KMV/CM		Capital Regulatorio IRB avanzado Basilea II	Cópula t Agrupada		Cópula t Agrupada $\lambda=.97$	
	99.5%	99.9%		99.5%	99.9%	99.5%	99.9%
A	12.93%	14.07%	14.51%	14.79%	16.45%	14.76%	16.62%
B	9.65%	10.92%	10.64%	10.20%	11.07%	10.48%	11.42%
C	1.00%	1.24%	0.63%	2.29%	2.85%	2.31%	2.71%
D	2.16%	2.41%	2.59%	3.52%	4.10%	3.30%	3.85%
E	10.43%	11.17%	13.80%	19.00%	21.89%	17.62%	20.80%
F	12.71%	13.92%	14.88%	16.66%	18.09%	16.52%	18.22%
G	14.92%	16.65%	15.52%	16.09%	17.13%	16.06%	16.20%
H	7.17%	7.47%	9.57%	12.46%	13.68%	12.15%	13.17%
I	2.03%	2.11%	2.91%	3.66%	3.99%	3.63%	4.02%
J	4.57%	5.09%	7.31%	8.58%	10.32%	7.83%	9.81%
TOTAL	5.55%	6.08%	6.47%	6.21%	6.74%	6.09%	6.41%

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 13. COMPARACIÓN DEL MODELO PROPUESTO CON UN ENFOQUE DE MATRICES DE TRANSICIÓN

Producto	Matrices Transición		Cópula t agrupada	
	PE	VaRq 99.5%	PE	VaRq 99.5%
A	9.40%	32.74%	9.01%	14.79%
B	4.11%	17.34%	5.48%	10.20%
C	0.36%	5.58%	0.43%	2.29%
D	0.91%	7.90%	1.41%	3.52%
E	6.21%	30.00%	7.61%	19.00%
F	6.57%	21.96%	9.02%	16.66%
G	8.23%	68.77%	9.83%	16.09%
H, I, J	3.04%	12.94%	3.20%	4.36%

Fuente: Elaboración propia.

Las diferencias entre los diferentes modelos son explicadas por los siguientes hechos. En (1) los valores distintos obedecen a la diversidad de criterios de información y de procedimientos en el tratamiento de las estructuras de dependencia utilizados por los modelos. En efecto aún cuando

²¹ En ambos enfoques los parámetros CCF y LGD se consideran constantes y, en nuestro caso, iguales a sus valores promedios históricos.

la construcción de los dos modelos tradicionales es esencialmente la misma, la correlación de activos se calcula sobre bases diferentes; esto es: mientras que el enfoque de un solo factor utiliza información histórica, el enfoque IRB incorpora correlaciones de activos predeterminadas a un nivel de confianza q fijado en 0.999 como lo muestra la ecuación (11). Y esto produce cifras muy diferentes entre el CER y CR. Pero más importante aún es que ninguno de los dos enfoques modela la estructura de dependencia de los parámetros de riesgo entre cubetas (subgrupos) de créditos del mismo producto o entre productos y, en consecuencia, ninguno incorpora los efectos de dependencia conjunta extrema, como en efecto lo hace la cópula t agrupada. Las consecuencias de esas deficiencias redundan en una subestimación de las pérdidas en el área de la cola derecha de las distribuciones subyacentes y en una omisión del efecto de diversificación del portafolio por parte de los dos modelos tradicionales.

Del mismo modo en (2), los mayores valores de PE registrados por el modelo de matrices de transición se explica por dos razones que inducen a pensar que las estimaciones obtenidas con este modelo pueden estar sesgadas. La primera es que ante cambios en las probabilidades de incumplimiento es casi heroico suponer, como lo hace el modelo, que las transiciones sobre los pagos vencidos se comporten de acuerdo con la propiedad Markoviana.²² Y la segunda es que resulta poco probable que las sumas de exposición total por pagos vencidos se comporten como variables aleatorias Bernoulli. Ambas limitaciones llevan a tomar con mucha precaución cualquier comparación entre los modelos de la Tabla 13.

²² Como la información disponible contiene agregado al portafolio hipotecario, el número de productos que aparece en la Tabla 13 es menor que en las anteriores tablas. El supuesto de que el proceso de migración de pagos vencidos (incluido el estado absorbente de incumplimiento) sigue una cadena de Markov no se satisface regularmente en la práctica (Lando y Skodeberg, 2002). Además, al igual que sucede con los dos últimos modelos presentados en esta sección, ni la estructura de dependencia de los parámetros de riesgo ni la dependencia entre incumplimientos son considerados por el modelo de matrices de transición; lo que hace dudar de la validez de sus resultados aun cuando es muy utilizado en la práctica.

Conclusiones

Un balance general

El documento presenta un procedimiento de cálculo del *CER* para un portafolio de créditos al menudeo. El objetivo es desarrollar una metodología en cuatro etapas que facilite el cómputo del *CER* en instituciones financieras como las mexicanas. Las etapas para el tratamiento de dicho portafolio son: (1) segmentación en cubetas y productos y estimación de parámetros de riesgo, (2) aplicación de diferentes tipos de estructuras de dependencia multivariadas, (3) pruebas de bondad de ajuste y (4) comparación con otros métodos de estimación del *CER* y *CR*. Con excepción de la primera etapa, las restantes son cruciales para el cálculo adecuado del *CER* debido a que su omisión limita los alcances de la metodología.

Las conclusiones principales sostienen que, durante el desarrollo de las etapas (2) y (3), las cópulas elípticas –generalizada y agrupada– de las familias *t* de *Student* ofrecen mejores resultados en la modelación del comportamiento de las pérdidas extremas que cualquier otra estructura de dependencia comúnmente utilizada en finanzas, como es el caso de la cópula gaussiana y la de independencia.²³ En concreto, el ejercicio del punto 3.4 confirma que: *a)* la cópula *t* de *Student* agrupada es la que presenta el mejor ajuste de todas las estructuras de dependencia²⁴ y, *b)* las diferencias por producto entre los ajustes de la cópula simétrica y la generalizada no son significativas, aun cuando ésta última incorpora parámetros de asimetría en la estructura de dependencia. Finalmente, en la etapa (4), se observa que el modelo de incumplimiento de un sólo factor tiende a subestimar el *CER*, mientras que el enfoque de matrices de transición de pagos vencidos tiende a sobreestimarlos. Para la mayoría de los productos, el modelo de un sólo factor arroja un *CER* menor que el requerimiento de capital regulatorio estipulado por Basilea II, lo cual obedece al hecho de que mientras la correlación de activos utilizada por el primero es calculada con información histórica, en el segundo ésta es fijada con criterios regulatorios y un nivel de confianza predeterminado de 99.9%. Las estimaciones de *CER* en el modelo propuesto son, en general, superiores al requerimiento regulatorio que establecen las reglas de capitalización del enfoque más avanzado de IRB propuestas en Basilea II.²⁵

²³ Además de la cópula *t* agrupada existen otras cópulas relacionadas con la familia *t* de *Student* como la *t* de Valores Extremos y la *t* de Cola Inferior. Sin embargo, se decidió no incluirlas porque no agrega mayor información al análisis y su manipulación es bastante complicada (Demarta y McNeil, 2004).

²⁴ La cópula agrupada permite modelar la relación entre productos con diferentes índices de dependencia extrema y, como consecuencia, observar la agregación de las pérdidas del portafolio total y el beneficio del efecto de diversificación.

²⁵ En el ejemplo que desarrollamos en el texto, estas cifras sugieren que el capital regulatorio fijado por Basilea II puede resultar insuficiente para cubrir el capital en riesgo del banco considerado al otorgar créditos al menudeo.

Como todo procedimiento estadístico, la metodología aquí propuesta no se encuentra exenta de limitaciones. Para empezar es sabido que las estimaciones de riesgo de crédito en el país están seriamente afectadas por la falta de registros de largo plazo confiables (Márquez, 2006). En nuestro caso, esta carencia afecta seriamente la efectividad de los ajustes de las cópulas o de los métodos de valores extremos debido a las propiedades asintóticas de sus estimadores. No hay duda que con una muestra mayor, la calidad de las medidas de riesgo hubiera mejorado sustancialmente y bajo supuestos más realistas. En particular se hubiera podido utilizar técnicas de series de tiempo para modelar las observaciones históricas de los parámetros de riesgo en lugar de considerarlas variables i.i.d., como se asume en los supuestos (1) y (2) del apartado 2.1.

No obstante las deficiencias, el documento constituye un esfuerzo importante en la exploración de métodos que no dependan de modelos de préstamos comerciales para calcular el riesgo de portafolios de créditos de personas físicas. La combinación del uso de cópulas multivariadas con algunos resultados de la TVE es una prueba de que hay manera de tratar portafolios tan diferentes (como son los de préstamos comerciales y al menudeo) con métodos distintos. La mayor virtud de la metodología aquí expuesta es la gran flexibilidad que ofrece al administrador de riesgos para modelar no sólo la dependencia existente entre los factores de riesgo, sino también, entre los grupos de créditos y productos del portafolio: un aspecto que no siempre es posible encontrar en los modelos tradicionales ya vistos o en aquellos originalmente diseñados para créditos comerciales.

Apéndice: Algoritmos de estimación

Entre los numerosos procedimientos estadísticos diseñados para tratar con distribuciones elípticas, son pocos los que ajustan cópulas elípticas independientemente de sus marginales, como el desarrollado por Kostadinov, 2005 y que aparece resumido en el algoritmo 1 del Apéndice. El método permite estimar robustamente las medidas de dependencia ρ_τ y λ , así como el índice de la cola α y los parámetros de la cópula t de Student agrupada. Para el caso de las cópulas elípticas generalizadas se propone el algoritmo 2 para estimar μ y Σ de acuerdo con el procedimiento sugerido por Frahm, 2003.

En ambos algoritmos se considera que las realizaciones de n copias independientes del vector aleatorio X (el conjunto de los datos) están denotadas por

$$\{(x_{1t}, \dots, x_{dt})\}_{t=1}^n \equiv \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \Lambda & x_{1n} \\ x_{21} & O & & M \\ M & & O & M \\ x_{d1} & \Lambda & \Lambda & x_{dn} \end{bmatrix} = [x_{\cdot 1} \ x_{\cdot 2} \ \dots \ x_{\cdot n}]$$

Algoritmo 1

- (i) Determinar las correlaciones tau de Kendall de cada pareja (X_i, X_j) mediante el estimador $\hat{\rho}_\tau^{(n)}(X_i, X_j) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{k>l} \text{sign}[(x_{ik} - x_{il})(x_{jk} - x_{jl})]$;
- (ii) Calcular $\hat{\rho}_{ij} = \text{sen}(\frac{\pi}{2} \hat{\rho}_\tau^{(n)}(X_i, X_j))$ para estimar así la matriz de correlación (ρ_{ij}) ;
- (iii) Estimar los coeficientes de dependencia de la cola inferior $\hat{\Lambda}^{(n)} = (\lambda_{ij}^n)_{i,j=1}^d$ como

$$\lambda_{ij}^n \equiv \hat{\lambda}_i^{(n,r)}(X_i, X_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{r} 1_{\{Q_k < r\}} \text{sen}(2\phi_k),$$

donde para $k=1, K, n$ las cantidades (Q_k, ϕ_k) satisfacen las ecuaciones $\hat{F}_i(x_{ik}) = Q_k \text{sen} \phi_k$, $\hat{F}_j(x_{jk}) = Q_k \cos \phi_k$, donde cada \hat{F}_i es la f.d. empírica de la componente X_i ;

- (iv) Estimar el índice de la cola α de la v.a. espectral R como

$$\hat{\alpha}^{(n)} = \arg \min_{\alpha > 0} \left\| \lambda\left(\alpha, \frac{\pi}{4} (1 - \hat{\rho}_{ij})\right)_{ij} - \hat{\Lambda}^{(n)} \right\|_x,$$

donde $L(\alpha, \hat{\rho}_\tau^{(n)})$ es la matriz $\lambda(\alpha, \frac{\pi}{4}(1 - \hat{\rho}_{ij}))_{ij}$, la función $\lambda(\alpha, x)$ está definida como $\lambda(\alpha, x) = \frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha t dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha t dt}$ y $\|A\|_x = \sum_{i,j=1}^d A_{ij}^2$ define la norma en L^2 definida sobre $M_{d \times d}(\mathfrak{R})$.

Algoritmo 2

- (i) Estimar los parámetros (ρ_{ij}) y α de una distribución elíptica generalizada sobre el vector X usando el Algoritmo 1
- (ii) Ajustar a cada componente de X alguna f.d. marginal F_j^* continua. Si por ejemplo, el número de observaciones n no es muy grande, se puede utilizar un kernel de suavización;
- (iii) Simular observaciones $y_{1,K}, y_N$ de un vector Y cuya representación está dada por $Y = \mu + RAU^{(k)}$, utilizando las estimaciones de los parámetros anteriores y estructura de dependencia de dicha representación (bajo la especificación de la f.d. de la v.a. espectral R);
- (iv) Construir observaciones $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ de la cópula empírica con las observaciones simuladas $y_{1,K}, y_N$, a saber, $\hat{u}_i = (U_{i1}, \dots, U_{id})' = (\hat{F}_1(y_{i1}), \dots, \hat{F}_1(y_{id}))'$, donde \hat{F}_j es un estimador de la f.d. de Y_j , por ejemplo, se puede usar una variante de la f.d. empírica $\hat{F}_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{\{y_{ij} \leq x\}}$.
- (v) Con las observaciones simuladas $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$, las cuales incorporan la estructura de dependencia de la cópula C , construir $\hat{x}_j = F_j^{*-1}(\hat{u}_j)$, $j = 1, \dots, N$. Los vectores $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ son observaciones simuladas del vector original X .

Bibliografía

- BCBS (2004). International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework. Basel Committee on Banking Supervision
- Biggs, D; B. De Ville y E. Suen (1991). "A Method of Choosing Multiway Partitions for Classification and Decision Trees", *Journal of Applied Statistics*, 62, pp. 18-49.
- Bouyé, E; V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet y T. Roncalli (2000). "Copulas for Finance. A Reading Guide and Some Applications", Financial Econometrics Research Centre, CUBSL, London.
- Crosbie, P. y J. Bohn (2002), "Modelling Default Risk", KMV working paper.
- Crouhy, M; D. Galai y R. Mark (2000). "A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models", *Journal of Banking and Finance*, 24, pp. 59-117.
- De Andrade, F. y L. Thomas (2004). "Structural Models in Consumer Credit", Risk and Insurance 0407001, EconWPA.
- Demarta, S. y A. McNeil (2004). "The t Copula and Related Copulas", Preprint, ETH Zurich.
- Díaz, A. (2003). "Teoría de valores extremos para sucesiones de variables aleatorias dependientes", Tesis de licenciatura, UNAM.
- Embrechts, P; C. Klüppelberg y T. Mikosh (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer Verlag, Berlin.
- Embrechts, P; A. McNeil y D. Straumann (2002). "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls", Risk Management for Central Bank Foreign Reserves, pp. 243-261, Frankfurt: European Central Bank.
- Frahm, G. y M. Junker (2003). "Generalized Elliptical Distributions: Models and Estimation", Research Center Caesar Financial Engineering.
- Frey, R. y A. McNeil (2003). "Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk", *Journal of Risk*, 6(1), pp. 59-92.
- Hult, H. y F. Lindskog (2001). "Multivariate Extremes, Aggregation and Dependence in Elliptical Distribution", Research paper, RiskLab.
- Joos, P; K. VanHoof, H. Ooghe y N. Sierens (1998). "Credit Classification: A Comparison of Logit Models and Decision Trees", 10th European Conference on Machine Learning, April 24, Chemnitz (Germany), pp. 59-72.
- Kole, E; K. Koedijk y M. Verbeek (2005). "Testing Copulas to Model Financial Dependence", Dept of Financial Management, RSM Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands.
- Kostadinov, K. (2005). "Non-parametric Estimation of Elliptical Copula with Application to Credit Risk", Research paper, Munich University of Technology.
- Lando, T. y T. Skodeberg (2002). "Analyzing Rating Transitions and Rating Drift with Continuous Observations", *Journal of Banking and Finance*, 26, pp. 423-444.
- Lindskog, F; A. McNeil y U. Schomock (2003). Credit Risk-Measurement, Evaluation and Management, Physica-Verlag, Heidelberg.
- Márquez Diez-Canedo, J. (2006). Una nueva visión del riesgo de crédito, Limusa, México.

- Márquez, J. y F. López (2006). “Un modelo de riesgo de crédito y su aplicación para realizar una prueba de estrés del sistema financiero mexicano”, *Estabilidad financiera*, 10, pp. 25-54.
- Matten, C. (2000). *Managing Bank Capital. Capital Allocation and Performance Measurement*, John Wiley & Sons, New York.
- Panchenko, V. (2005). “Goodness of Fit Test for Copulas”, *Physica A*, 355, pp. 176-182.
- Perli, R. y W. Nayda (2004). “Economic and Regulatory Capital Allocation for Revolving Retail Exposures”, *Journal of Banking & Finance*, 28(4), pp. 789-809.
- Ramírez, J. C. (2004). “Usos y limitaciones de los procesos estocásticos en el tratamiento de distribuciones de rendimientos con colas gordas”, *Revista de Análisis Económico*, 19, pp. 51-76.
- RMA (2003). *Retail Credit Economic Capital Estimation-Best Practices*, The Risk Management Association (RMA).
- Saita, F. (2007). *Value at Risk and Bank Capital Management*, Academic Press Advanced Finance Series, Elsevier Inc.

Novedades

DIVISIÓN DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA

- Casar, Ma. Amparo, *Los gobiernos sin mayoría en México: 1997-2006*, DTAP-195
- De Angoitia, Regina, *La evolución de los portales del gobierno federal: la experiencia de ocho dependencias*, DTAP-196
- Cabrero, Enrique, *De la descentralización como aspiración a la descentralización como problema*, DTAP-197
- Sour, Laura y Eunises Rosillo, *¿Cuáles son los resultados del presupuesto por resultados?*, DTAP-198
- Arellano, David y Walter Lepore, *Prevención y control de conflictos de interés: lecciones para la Administración Pública Federal en México...*, DTAP-199
- Sour, Laura y Fredy Girón, *El efecto flypaper de las transferencias intergubernamentales del ramo 28...*, DTAP-200
- Mariscal, Judith, *Convergencia tecnológica y armonización regulatoria en México: una evaluación de los instrumentos regulatorios*, DTAP-201
- Mariscal, Judith, *Market Structure in the Latin American Mobile Sector*, DTAP-202
- De Angoitia, Regina y Fernando Ramírez, *Estrategias utilizadas para minimizar costos por los usuarios de telefonía celular...*, DTAP-203
- Cejudo, Guillermo, Gilberto Sánchez y Dionisio Zabaleta, *El (casi inexistente) debate conceptual sobre la calidad del gobierno*, DTAP-204

DIVISIÓN DE ECONOMÍA

- Hernández, Kólver, *State-Dependent Nominal Rigidities & Disinflation Programs in Small Open Economies*, DTE-418
- Hernández, Kólver and Asli Leblebicioglu, *A Regime Switching Analysis of the Exchange Rate Pass-through*, DTE-419
- Ramírez, José Carlos y David Juárez, *Viejas ideas económicas con nuevas tecnologías matemáticas*, DTE-420
- Delajara, Marcelo, *Household and Community Determinants of Infants' Nutritional Status in Argentina*, DTE-421
- Villagómez, Alejandro, Robert Duval y Lucía Cerilla, *Análisis de la evolución de la matrícula de la licenciatura en economía en México, 1974-2004*, DTE-422
- Brito, Dagobert and Juan Rosellón, *Quasi-Rents and Pricing Gas in Mexico*, DTE-423
- Rosellón, Juan and Hannes Weigt, *A Dynamic Incentive Mechanism for Transmission Expansion in Electricity Networks-Theory, Modeling and Application*, DTE-424
- Smith, Ricardo, *A Monte Carlo EM Algorithm for FIML Estimation of Multivariate Endogenous Switching Models with Censored and Discrete Responses*, DTE-425
- Brito, Dagobert and Juan Rosellón, *Lumpy Investment in Regulated Natural Gas Pipelines: An Application of the Theory of The Second Best*, DTE-426
- Di Giannatale, Sonia, Patricia López y María José Roa, *Una introducción conceptual al desarrollo financiero, capital social y anonimidad: el caso de México*, DTE-427

DIVISIÓN DE ESTUDIOS INTERNACIONALES

- González, Guadalupe, *Percepciones sociales sobre la migración en México y Estados Unidos: ¿hay espacios para cooperar?*, DTEI-162
- Bernhard, William y David Leblang, *Standing Tall When the Wind Shifts: Financial Market Responses to Elections, Disasters and Terrorist Attacks*, DTEI-163
- Velázquez, Rafael, *La relación entre el Ejecutivo y el Congreso en materia de política exterior durante el sexenio de Vicente Fox...*, DTEI-164
- Ruano, Lorena, *De la exaltación al tedio: las relaciones entre México y la Unión Europea...*, DTEI-165
- Martínez, Ferrán e Ignacio Lago Peñas, *Why new Parties? Changes in the number of Parties over time within Countries*, DTEI-166
- Sotomayor, Arturo, *México y la ONU en momentos de transición: entre el activismo internacional, parálisis interna y crisis internacional*, DTEI-167
- Velasco, Jesús, *Acuerdo migratorio: la debilidad de la esperanza*, DTEI-168
- Velázquez, Rafael y Roberto Domínguez, *Relaciones México-Unión Europea: una evaluación general en el sexenio del presidente Vicente Fox*, DTEI-169
- Martínez i Coma, Ferrán e Ignacio Lago Peñas, *¿Qué piensan los mexicanos de los Estados Unidos?*, DTEI-170
- Velasco, Jesús, *Lou Dobbs and the Rise of Modern Nativism*, DTEI-171

DIVISIÓN DE ESTUDIOS JURÍDICOS

- Magaloni, Ana Laura, *¿Cómo estudiar el derecho desde una perspectiva dinámica?*, DTEJ-19
- Fondevila, Gustavo, *Cumplimiento de normativa y satisfacción laboral: un estudio de impacto en México*, DTEJ-20
- Posadas, Alejandro, *La educación jurídica en el CIDE (México). El adecuado balance entre la innovación y la tradición*, DTEJ-21
- Ingram, Matthew C., *Judicial Politics in the Mexican States: Theoretical and Methodological Foundations*, DTEJ-22
- Fondevila, Gustavo e Ingram Matthew, *Detención y uso de la fuerza*, DTEJ-23
- Magaloni, Ana Laura y Ana María Ibarra Olguín, *La configuración jurisprudencial de los derechos fundamentales...*, DTEJ-24
- Magaloni, Ana Laura, *¿Por qué la Suprema Corte no ha sido un instrumento para la defensa de derechos fundamentales?*, DTEJ-25
- Magaloni, Ana Laura, *Arbitrariedad e ineficiencia de la procuración de justicia: dos caras de la misma moneda*, DTEJ-26
- Ibarra, Ana María, *Los artificios de la Dogmática Jurídica*, DTEJ-27
- Fierro, Ana Elena y Adriana García, *Responsabilidad patrimonial del Estado. Interpretación de la SCJN del artículo 113 constitucional*, DTEJ-28

DIVISIÓN DE ESTUDIOS POLÍTICOS

- Lehoucq, Fabrice, *Why is Structural Reform Stagnating in Mexico? Policy Reform Episodes from Salinas to Fox*, DTEP-195
- Benton, Allyson, *Latin America's (Legal) Subnational Authoritarian Enclaves: The Case of Mexico*, DTEP-196
- Hacker, Casiano y Jeffrey Thomas, *An Antitrust Theory of Group Recognition*, DTEP-197
- Hacker, Casiano y Jeffrey Thomas, *Operationalizing and Reconstructing the Theory of Nationalism*, DTEP-198
- Langston, Joy y Allyson Benton, "A ras de suelo": *Candidate Appearances and Events in Mexico's Presidential Campaign*, DTEP-199
- Negretto, Gabriel, *The Durability of Constitutions in Changing Environments...*, DTEP-200
- Langston, Joy, *Hasta en las mejores familias: Madrazo and the PRI in the 2006 Presidential Elections*, DTEP-201
- Schedler, Andreas, *Protest Beats Manipulation. Exploring Sources of Interparty Competition under Competitive and Hegemonic Authoritarianism*, DTEP-202
- Villagómez, Alejandro y Jennifer Farias, *Análisis de la evolución de la matrícula de las licenciaturas en CP, AP y RI en México, 1974-2004*, DTEP-203
- Ríos, Julio, *Judicial Institutions and Corruption Control*, DTEP-204

DIVISIÓN DE HISTORIA

- Barrón, Luis, *Revolucionarios sí, pero Revolución no*, DTH-44
- Pipitone, Ugo, *Oaxaca: comunidad, instituciones, vanguardias*, DTH-45
- Barrón, Luis, *Venustiano Carranza: un político porfiriano en la Revolución*, DTH-46
- Tenorio, Mauricio y Laurencio Sanguino, *Orígenes de una ciudad mexicana: Chicago y la ciencia del Mexican Problem (1900-1930)*, DTH-47
- Rojas, Rafael, *José María Heredia y la tradición republicana*, DTH-48
- Rojas, Rafael, *Traductores de la libertad: el americanismo de los primeros republicanos*, DTH-49
- Sánchez, Mónica Judith, *History vs. the Eternal Present or Liberal Individualism and the Morality of Compassion and Trust*, DTH-50
- Medina, Luis, *Salida: los años de Zedillo*, DTH-51
- Sauter, Michael, *The Edict on Religion of 1788 and the Statistics of Public Discussion in Prussia*, DTH-52
- Sauter, Michael, *Conscience and the Rhetoric of Freedom: Fichte's Reaction to the Edict on Religion*, DTH-53

Ventas

El CIDE es una institución de educación superior especializada particularmente en las disciplinas de Economía, Administración Pública, Estudios Internacionales, Estudios Políticos, Historia y Estudios Jurídicos. El Centro publica, como producto del ejercicio intelectual de sus investigadores, libros, documentos de trabajo, y cuatro revistas especializadas: *Gestión y Política Pública*, *Política y Gobierno*, *Economía Mexicana Nueva Época* e *Istor*.

Para adquirir cualquiera de estas publicaciones, le ofrecemos las siguientes opciones:

VENTAS DIRECTAS:	VENTAS EN LÍNEA:
Tel. Directo: 5081-4003 Tel: 5727-9800 Ext. 6094 y 6091 Fax: 5727 9800 Ext. 6314 Av. Constituyentes 1046, 1er piso, Col. Lomas Altas, Del. Álvaro Obregón, 11950, México, D.F.	Librería virtual: www.e-cide.com Dudas y comentarios: publicaciones@cide.edu

¡¡Colecciones completas!!

Adquiere los CDs de las colecciones completas de los documentos de trabajo de todas las divisiones académicas del CIDE: Economía, Administración Pública, Estudios Internacionales, Estudios Políticos, Historia y Estudios Jurídicos.



¡Nuevo! ¡¡Arma tu CD!!



Visita nuestra Librería Virtual www.e-cide.com y selecciona entre 10 y 20 documentos de trabajo. A partir de tu lista te enviaremos un CD con los documentos que elegiste.