

NÚMERO 420

JOSÉ CARLOS RAMÍREZ Y DAVID JUÁREZ

Viejas ideas económicas con nuevas
tecnologías matemáticas

ABRIL 2008



www.cide.edu

• Las colecciones de **Documentos de Trabajo** del **CIDE** representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).

• D.R. © 2008. Centro de Investigación y Docencia Económicas, carretera México-Toluca 3655 (km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210, México, D.F.
Fax: 5727•9800 ext. 6314
Correo electrónico: publicaciones@cide.edu
www.cide.edu

• Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido así como el estilo y la redacción son su responsabilidad.

Resumen

El objetivo del documento es mostrar cómo el uso de las técnicas de la Teoría de Sistemas Dinámicos (TSD) ha afectado el contenido temático del análisis económico tradicional ya sea favoreciendo el desarrollo de nuevo conocimiento o permitiendo una traducción más completa de las ideas económicas al lenguaje matemático. Para tal efecto se presentan los resultados de una clasificación hecha sobre los 4344 artículos publicados entre 1990 y 2004 en las cuatro revistas internacionales más influyentes de la disciplina y se exponen dos versiones dinámicas del modelo poblacional de Malthus. Las conclusiones principales revelan que: 1) la introducción de la TSD ha vuelto más complejo el significado dinámico de los equilibrios en subdisciplinas de la economía tradicionalmente caracterizadas por los análisis estáticos, y 2) la utilización acuciosa de las técnicas de la TSD permite encontrar equilibrios ignorados por la teoría convencional.

Abstract

This paper aims at showing how the use of the Dynamical Systems Theory (DST) has affected the thematic content of the traditional economic analysis either by fostering new theoretical developments or by making translation from economic language to mathematics more complete. To this end, we elaborate a classification on 4344 papers which were published in the four leading economic journals between 1990 and 2004 and present two dynamical interpretations of the Malthusian Model. The main conclusions state that: 1) the application of DST to economics has made the meaning of dynamic equilibriums more complex in subdisciplines that are traditionally characterized by static analysis; and 2) the accurate use of DST techniques allows finding equilibriums which are longstanding disregarded by mainstream theories.

Introducción

En un artículo publicado hace poco más de tres lustros, Debreu (1991, p. 1) hacía notar que, ya para entonces, el uso intensivo de temas matemáticos avanzados en economía había afectado “profundamente [a la] profesión”. Hoy en día la tendencia no ha hecho más que acentuarse. No sólo se ha incrementado el número de esos temas en revistas no especializadas, sino que el nivel de profundidad matemático antes reservado para disciplinas como la física se ha vuelto familiar en las publicaciones de economía de mayor prestigio internacional.

La gran celeridad que ha cobrado la formalización en la teoría económica ha puesto en claro que, si uno desea ser un participante activo en su actual desarrollo, no hay otra alternativa que contar con un alto grado de profesionalismo matemático (Debreu, *loc. cit.*). De lo contrario se corre el riesgo de quedar al margen de la disciplina, pues hay que tener en cuenta, entre otras cosas, que el tiempo que media ahora entre una novedad matemática y su adaptación a la teoría económica se ha reducido a tal grado que, no en pocas ocasiones, los mismos matemáticos han optado por iniciar sus aplicaciones en los distintos campos de la economía.¹

Entre los campos más afectados por la introducción de nuevo conocimiento matemático sobresalen los que hacen acopio de la Teoría de Sistemas Dinámicos (TSD).² El reconocimiento de que los mecanismos de mercado pueden ser inherentemente inestables en su dinámica y no sólo deterministas y estables, como era la visión dominante hace unas décadas, ha abierto grandes avenidas de investigación en economía que involucran la utilización de temas avanzados de la TSD. La revitalización, por ejemplo, de la hipótesis del ciclo endógeno, según la cual las fluctuaciones agregadas pueden ser endógenamente inestables aún en ausencia de *shocks* estocásticos, ha favorecido la aparición de modelos macroeconómicos no lineales que echan mano de los últimos avances de las teorías topológica y ergódica de los

¹ Además de los ya conocidos y lejanos casos de Bachelier en finanzas, Nash y Von Neumann en teoría de juegos o Dantzig en la optimización estática de problemas microeconómicos, cabe destacar la aplicación relativamente reciente de las teorías de fractales y de leyes de potencias por Mandelbrot al análisis de los precios de los activos, el cálculo no estándar de Robinson y la teoría de correspondencias de Hildenbrand a la fundamentación de equilibrios únicos en grandes sistemas económicos (Debreu, 1984, 1991; Brown y Robinson, 1972; Farmer, 1999 y Weintraub, 2002). Cada una de estas contribuciones, que ahora son utilizadas en otras áreas del conocimiento, tuvieron su aplicación inicial en economía.

² Originalmente la TSD nació como un tópico especial de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (TEDO). Los trabajos de Poincaré y Bendixon sobre las propiedades topológicas de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas en el plano y, posteriormente, la teoría de estabilidad desarrollada por Liapunov dieron cuerpo a los primeros trabajos de la TSD a finales del siglo XIX, pero sin desprenderse todavía de la TEDO. No fue sino hasta la tercera década del siglo XX que Birkhoff extendió los horizontes de la TSD más allá de la TEDO al establecer las dos corrientes sobre las que se fundan los estudios modernos de la TSD; esto es: la teoría topológica y la teoría ergódica. Sobre esta división se han incorporado recientemente las teorías de grupos de transformación topológicos y de estabilidad estructural dentro del marco de la topología diferencial (Bhatia y Szegó, 2002).

sistemas dinámicos (Boldrin y Woodford, 1992). Asimismo, la aceptación de que las trayectorias de las variables de control pueden experimentar comportamientos dinámicos complejos en la vecindad de los puntos críticos ha demandado el uso de las teorías de estabilidad estructural y de catástrofes en los nuevos modelos de crecimiento económico (Grandmont, 1992 y Varian, 1991).

El objetivo de este documento es mostrar cómo el uso de las técnicas de la Teoría de Sistemas Dinámicos (TSD) ha afectado el contenido temático del análisis económico tradicional ya sea favoreciendo el desarrollo de nuevas áreas de conocimiento o permitiendo una traducción más completa de las ideas económicas al lenguaje matemático. Los resultados, sin embargo, no siempre han sido muy afortunados, pues así como se ha observado una beneficiosa relación entre las subdisciplinas de la economía tras la introducción de la TSD, su uso indiscriminado ha alterado en algunos casos el significado original de los conceptos económicos (véase, por ejemplo, Backhouse, 1998 y Dow, 1998, 1999).

El documento está organizado en tres apartados. En el primero se ofrece un panorama de la extensión de la TSD hacia distintas áreas de la economía que hasta hace dos décadas estaban caracterizadas por los análisis estáticos. Para tal efecto se presentan los resultados de una clasificación hecha sobre los 4344 artículos publicados entre 1990 y 2004 en las cuatro revistas internacionales más influyentes de la disciplina. En el segundo apartado se explica esta extensiva utilización de la TSD con base en la desigual resistencia de los autores a abandonar esquemas de optimización diseñados para arrojar equilibrios de *steady state*, así como en su diferente percepción del papel de la matemática en economía. El tercer apartado expone dos versiones dinámicas del modelo poblacional de Malthus para mostrar que la introducción de la TSD permite encontrar equilibrios no considerados anteriormente por la teoría convencional. Finalmente, en las conclusiones, se comentan las posibles repercusiones del uso de la TSD en el contenido y la enseñanza futura de la economía.

1. La nueva orientación de la matemática en economía

La mayoría de los especialistas concluye que hay tres grandes etapas en el desarrollo de la matemática en economía (consúltese, por ejemplo, Arrow e Intriligator, 1991 y Weintraub, 2002).³ La primera, que dio forma a la teoría microeconómica entre 1838 y 1947, estuvo basada predominantemente en la

³ Arrow y Intriligator (1991) elaboran esta periodización con el fin de resaltar el predominio de ciertas tecnologías matemáticas en determinados periodos de evolución de la disciplina, no para establecer fechas definitivas sobre su auge y declinación. De hecho sostienen que esto último es impensable pues aún hoy en día los economistas continúan utilizando las ramas de la matemática que tuvieron su mayor auge en las primeras etapas de desarrollo de la economía.

adopción de los modelos iniciales de energía de la física y, por ende, en el uso del cálculo de variable real (Mirowsky, 1989). La segunda, que incluye un periodo corto después de la segunda posguerra (1948-1960), se caracterizó por aplicar las nociones elementales de la teoría de juegos, los modelos lineales y la teoría de conjuntos a diversas áreas de la macroeconomía, microeconomía y crecimiento económico. Y la última, que se extiende hasta nuestros días, es conocida como la etapa de integración por aplicar combinadamente la tecnología matemática de las dos etapas anteriores, pero con una profundidad mayor, en casi todas las ramas de la economía (Arrow e Intriligator, 1991).

La cualidad integradora de la tercera etapa es expresada, en buena medida, en el decidido vuelco experimentado por los economistas hacia el análisis dinámico (Weintraub, 1991). De hecho existen, al menos, dos razones para considerar a la TSD como la principal responsable de la renovada expansión de la matemática en toda la disciplina. La primera es que la amplitud de conocimiento matemático requerido por el análisis de los sistemas dinámicos no tiene parangón en el pasado reciente de la teoría económica. A diferencia de las fases iniciales del desarrollo de los modelos económicos dinámicos, en las que se requería un dominio moderado de la TEDO y de las técnicas de optimización deterministas, la tercera etapa exige no sólo una familiarización más profunda con estos temas sino, también de manera fundamental, con los sistemas dinámicos no lineales. Y es que los nuevos modelos de ciclos endógenos son esencialmente no lineales y su dominio profundo requiere del uso de topología, análisis funcional, teoría de la medida, estabilidad estructural, optimización estocástica y juegos diferenciales que, hasta hace poco, eran relativamente extraños a la disciplina (Boldrin y Woodford, 1992).

Una evidencia de este vuelco a los análisis dinámicos la encontramos en la muestra que realizamos en las cuatro revistas internacionales más prestigiosas de economía [*Econometrica* (ECO), *The American Economic Review* (AER), *Journal of Political Economy* (JPE) y *Journal of Economic Theory* (JET)].⁴ De acuerdo con los resultados de esta muestra, de los 4344 artículos publicados entre 1990 y 2004, cerca de una quinta parte (783) incluyó una caracterización dinámica del fenómeno bajo estudio (ver tabla 1).⁵ La

⁴ Las conclusiones derivadas de estas cuatro publicaciones son muy importantes para el desarrollo de la teoría económica en virtud de que se trata de las revistas líderes de la disciplina de acuerdo con varios sistemas de puntuación (véase por ejemplo, Kailatzidakis et al., 2003). Stigler et al. (1995) sostiene que estas revistas concentran, en promedio, 70% de las citas de las nueve publicaciones periódicas más importantes en economía. Además tienen el cociente de citas por pares más elevado de todas las revistas internacionales, convirtiendo a ECO y a JPE en los mayores exportadores de conocimiento de la disciplina. ECO es, a su vez, clasificada como la revista que mas capacidad matemática requiere para su publicación.

⁵ Por caracterización dinámica nos referimos a la utilización que hacen los autores de alguna variante de la siguiente definición de sistema dinámico: Un sistema dinámico sobre un espacio métrico X , con medida métrica Q , es la tripleta (X, R, π) , donde R es el conjunto de números reales y π es un mapa que va del espacio producto $X \times R$ al espacio X el cual satisface los siguientes axiomas: 1) $\pi(x, 0) = x$, $\forall x \in X$ (axioma de

proporción es aún más elevada si eliminamos de la muestra a los artículos denominados cortos, que aparecieron como notas o que fueron resultado de una invitación, pues en ese caso la cifra alcanzó 24.48% del total; es decir casi uno de cada cuatro artículos centrales incorporó alguna variante del análisis dinámico (ver tabla 2). Este porcentaje es significativamente mayor que el 11% obtenido para el caso de AER y ECO en el decenio comprendido entre 1980 y 1990.

TABLA 1. NÚMERO DE ARTÍCULOS CON CONTENIDO DINÁMICO POR SUBDISCIPLINA Y REVISTA

		SUBDISCIPLINAS		
		MACROECONOMÍA Y TEORÍA DE CRECIMIENTO	OTRAS	TOTAL
REVISTA	AER	76	66	142 (1446)
	ECO	29	73	102 (890)
	JPE	84	126	210 (730)
	JET	162	167	329 (1278)
	TOTAL	351	432	783 (4344)

Fuente: elaboración propia.

TABLA 2. TIPO DE ARTÍCULO CON CONTENIDO DINÁMICO POR REVISTA (%)

		TIPO DE ARTÍCULO		
		ARTÍCULOS CENTRALES	ARTÍCULOS CORTOS	TOTAL
REVISTA	AER	90 (19.61%)	52 (5.29%)	142 (9.82%)
	ECO	99 (15.74%)	3 (1.15%)	102 (11.46%)
	JPE	210 (28.77%)	0 (0%)	210 (28.77%)
	JET	295 (29.15%)	34 (12.78%)	329 (25.74%)
	TOTAL	694 (24.48%)	89 (5.90%)	783 (18.02%)

Fuente: elaboración propia.

identidad); 2) $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$, $\forall x \in X$ y $t_1, t_2 \in R$ (axioma de grupo); y 3) π es continua (axioma de continuidad). El espacio X y el mapa π son conocidos, respectivamente, como el espacio fase y el mapa fase del sistema dinámico (véase Bhatia y Szegő, 2002). Para el caso de sistemas discretos el axioma 3) debe ser modificado para incluir solamente los valores discretos que resultan de iterar una función. “Un sistema dinámico discreto consiste de una función [una ecuación en diferencias] y sus iteraciones” (Holmgren, 2000, p. 2).

La segunda razón es que el radio de acción de la TSD no sólo abarca a las ramas *naturalmente* dinámicas, como macroeconomía o crecimiento económico, sino también a otras en las que predominan los análisis estáticos. Como se puede observar en las tablas 1 y 3, más de la mitad de los 783 artículos corresponde a 14 áreas distintas a esas dos ramas, en particular a la microeconomía, teoría de juegos y economía laboral. El cambio no deja de sorprender si consideramos que entre 1980 y 1990 la teoría del crecimiento y la macroeconomía concentraban cerca de 77% de los artículos dinámicos publicados en ECO y AER. Los modelos desarrollados en las nuevas áreas incorporan diferentes condiciones de estabilidad y convergencia en temas que van desde problemas de agencia en economía industrial hasta análisis de equilibrio general estocástico en comercio internacional (consúltese, por ejemplo, Inderst, 2004; Backus, Kehoe y Kydland, 1992).⁶

Las consecuencias inmediatas de esta nueva expansión se han visto reflejadas, por un lado, en una mayor atención de temas que incorporan más de un área de especialidad y, por otro lado, en una utilización más heterogénea de los conceptos de dinámica.

TABLA 3: NÚMERO DE ARTÍCULOS POR SUBDISCIPLINA Y REVISTA

REVISTA	SUBDISCIPLINA															
	Mac	T.C.	T.J.	E.L.	E.E.	Mic.	T.F.	E.A.	C.I.	H.E.	E.B.	E. Ind.	E.P.	E.R.	D.E.	E. Ins.
AER	45	31	9	3	2	7	7	3	3	2	7	11	4	1	1	6
ECO	17	12	29	5	1	12	6	0	2	0	3	10	3	0	1	1
JPE	63	21	2	13	4	38	32	1	4	4	4	14	1	0	5	4
JET	126	36	62	2	0	58	19	4	4	0	1	11	0	0	6	0
TOTAL	251	100	102	23	7	115	64	8	13	6	15	46	8	1	13	11

Mac (Macroeconomía); T.C. (Teoría del Crecimiento); T.J. (Teoría de Juegos); E.L. (Economía Laboral); E.E. (Economía Experimental); Mic (Microeconomía); T.F. (Teoría Financiera); E.A. (Economía Ambiental); C.I. (Comercio Internacional); H.E. (Historia Económica); E.B. (Economía del Bienestar); E. Ind. (Economía Industrial); E.P. (Economía Política); E.R. (Economía Regional); D.E. (Desarrollo Económico); E. Ins. (Economía Institucional)

Fuente: elaboración propia.

En efecto, la revisión de algunos artículos revela que ahora los autores buscan combinar elementos de distintas subdisciplinas no sólo para darles mayor realismo a los modelos sino, fundamentalmente, para garantizar su equilibrio

⁶ La clasificación no está exenta de arbitrariedades pues es evidente que no es igual de rigurosa la definición de sistemas dinámicos en un artículo de historia económica que en otro de crecimiento económico, como tampoco es igual la naturaleza dinámica descrita en un trabajo que incluye modelos estocásticos que en otro basado en teoría de juegos. Por esta razón es importante dejar en claro que la clasificación refleja más bien la intención de mostrar el cambio en el contenido temático de las subdisciplinas que utilizan la TSD, por más rudimentarias que sean las técnicas de análisis dinámico ahí practicadas, que en hacer una evaluación exhaustiva de la definición de sistemas dinámicos empleada en los trabajos.

dinámico, como es el caso, por ejemplo, de los recientes trabajos de localización industrial que incluyen variables macroeconómicas y de comercio internacional no presentes en los análisis estáticos (véase Keller, 2002).⁷ Esta superposición de subdisciplinas ha vuelto más complejo el análisis de los fenómenos económicos en el tiempo, pues al lado de los clásicos modelos de crecimiento con trayectorias estables y únicas es posible encontrar, incluso en las mismas revistas, modelos con múltiples trayectorias que no convergen a ningún valor límite cuando se hacen variar algunos parámetros *interdisciplinarios* –por ejemplo, la tasa de erosión de la conducta ética de los agentes– más allá de cierto umbral (véase, por ejemplo, Noe y Rebello, 1994).⁸

La complejidad del análisis es variable en cada trabajo pues, de acuerdo con la muestra, los autores adoptan diversos enfoques para estudiar la dinámica de un fenómeno. Hay, para empezar, documentos con una fuerte orientación empírica que asocian el concepto de dinámica a ecuaciones de crecimiento resultantes de una especificación econométrica o de una serie de tiempo, sin estar interesados en la evaluación de los puntos críticos. Entre éstos destacan documentos de historia económica, economía del bienestar, economía institucional o economía financiera, cuyo objetivo reside en proveer de evidencia a una hipótesis cualitativa sobre el comportamiento de aspectos tan diversos tales como: la crisis de 1929 (véase, por ejemplo Rappoport y White, 1994), las creencias culturales y la organización de la sociedad (Greif, 1994), la comunicación entre revistas de economía (Stigler, Stigler y Friedland, 1995) o el comportamiento de los precios de los activos financieros en presencia de consumidores heterogéneos (Brav, Constantinides y Geczy, 2002).

En seguida se encuentra otro grupo de artículos cuyos análisis dinámicos utilizan el formato de la teoría de juegos. Se trata de documentos donde los equilibrios estables se caracterizan por ser subconjuntos de Nash-Bayes y por satisfacer los principios de *backward induction* y *forward induction* en la forma de admisibilidad, dominancia iterada y equilibrio de dominación (Eichberger, 1993).⁹ En otras palabras, los equilibrios estables y dinámicos

⁷ De hecho la producción de nuevo conocimiento en algunas subdisciplinas no hubiera sido posible sin la utilización de la TSD durante los últimos quince años. La teoría de poblaciones con dos sexos (que sustituye a la de poblaciones estables de un sexo de Lotka) o la nueva generación de *matching models* que aseguran equilibrios bayesianos en el mercado laboral (Spence, 1974; Noldeke y Van Damme, 1990), son dos claros ejemplos que deben, en buena medida, su existencia a la aplicación de la TSD en el análisis económico.

⁸ Una consecuencia de esta interdisciplinariedad es que el concepto de equilibrio dinámico tiene ahora muchos significados pues, además de los consabidos punto fijos, ciclo límites o toros uno puede encontrar equilibrios inestables y múltiples, determinísticos y estocásticos, combinadores y separadores, con catástrofes, bifurcaciones, caos y atractores extraños o con componentes de Nash. ¡Y todo esto, considerando ligeros cambios a los mismos supuestos sobre los que se desarrolló la generación de modelos con *steady state*!

⁹ Existen también artículos centrados en las propiedades y condiciones de existencia de equilibrios en juegos dinámicos (véase, por ejemplo, Dockner y Sorger, 1996) o en algunas variantes que incluyen modelos de riesgo moral (Bhaskar, Damme, 2002) o de costos hundidos (Tröger, 2002).

pertenecen al conjunto conectado de estrategias o *componentes* de Nash y que, por lo tanto, comparten la misma distribución de pagos así como la misma trayectoria de equilibrio. Los equilibrios estables son invariantes a las perturbaciones de la forma normal de un juego de tal suerte que para cada perturbación siempre hay un equilibrio cercano a este conjunto estable de equilibrio (véase, por ejemplo, Ritzberger y Weibull, 1995). Cuando estos equilibrios son mezclados con ecuaciones diferenciales o en diferencias dan lugar a soluciones dinámicas de juegos diferenciales que arrojan equilibrios determinísticos y estocásticos distintos.¹⁰ En cada caso las aplicaciones han sido numerosas e incluyen desde problemas de aprendizaje en la teoría microeconómica de elección hasta modelos de múltiples etapas de juegos diferenciales en competencia oligopolista (consúltese, por ejemplo, Tornell y Velasco, 1992).

Finalmente destaca un tercer grupo de estudios que utiliza el concepto de dinámica en el sentido más convencional de la TSD, es decir, que analiza las condiciones de estabilidad y convergencia de las trayectorias de fenómenos económicos mediante distintos formatos de optimización dinámica. El grupo no es homogéneo y bien podemos decir que, de acuerdo con sus diferencias de énfasis en sus análisis de las condiciones de equilibrio, está dividido en tres subgrupos.

El primero de ellos, que a su vez es el más numeroso, acepta a pie juntillas los preceptos originales de los modelos neoclásicos de crecimiento y considera como solución regular la existencia de equilibrios estables y únicos (consúltese, por ejemplo, Segerstrom, 1991; Howitt, 1999). El segundo subgrupo, desprendido del anterior, reconoce que ante ciertas *anomalías* —como las que examina Backus *et al.* (1992) en forma de discrepancias entre su modelo y los datos— o ante la falta de evidencia para apoyar las predicciones de los modelos neoclásicos, es difícil asegurar la existencia de equilibrios únicos y estables.¹¹ Lucas (1990), por ejemplo, sostiene que para obtener esos equilibrios es necesario antes hacer ajustes en los supuestos y considerar las diferencias en capital humano, en la efectividad de los trabajadores y en las imperfecciones de los mercados como elementos indispensables para los análisis de convergencia entre países.

Y, por último, se encuentra un tercer subgrupo que abiertamente reconoce que las condiciones de esos equilibrios estables y únicos son muy restrictivas y que se presentan preferentemente en análisis que privilegian economías de un sólo sector (Boldrin y Rustichini, 1994) o, si se consideran ambientes estocásticos, en forma de ciclos y no sólo como atractores de dimensión cero

¹⁰ “Los juegos diferenciales pertenecen a una subclase de juegos dinámicos llamados juegos de espacio estado. En un juego de espacio estado el modelador introduce un conjunto de variables (estado) para describir el estado de un sistema dinámico en cualquier momento del juego. La hipótesis es que la influencia relevante del pasado sobre los pagos está adecuadamente resumida en las variables estado”. (Dockner *et al.*, 2006, p. 1).

¹¹ Otros ejemplos los encontramos en Benhabib y Perli (1994) y Boldrin y Montrucchio, (1995).

(Evans y Honkapohja, 1995). La extensión del análisis de estabilidad a economías de dos sectores ha hecho evidente que modelos de equilibrio deterministas pueden producir, también, trayectorias de acumulación de capital con dinámica compleja en forma de bifurcaciones (Boldrin y Rustichini, 1994 y Mitra y Nishimura, 2001), caos topológico (Mitra, 1996, 1998) o ergódico (Nishimura y Yano, 1995).¹²

2. Las razones acerca del uso diferencial de la TSD en economía

¿Qué explica esta expansión diferencial de la TSD en el análisis económico? En realidad no es fácil dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Para empezar, hay varios elementos de la explicación que se encuentran en el propio desarrollo de la disciplina y que se resumen en la creciente complejidad del objeto de estudio de los fenómenos dinámicos en economía. Pero también hay otros, igual de importantes, que tienen que ver con la diferente resistencia de los autores a abandonar esquemas de optimización originalmente concebidos para funcionar bajo sistemas dinámicos que arrojan únicamente estados estables.¹³

En general tenemos, por un lado, a los autores que consideran que las trayectorias dinámicas perturbadas por factores externos se propagan en forma amortiguada a lo largo del horizonte de planeación y, por otro lado, a los que asumen que las perturbaciones hacen oscilar a la economía erráticamente. Los primeros toman como base la metodología de Slutsky-Frisch-Tinbergen al sostener que esas perturbaciones son producidas por impulsos estocásticos exógenos que tienden a ser atenuados por diversos mecanismos de filtración de la economía. La generación de modelos de ciclo de negocios con especificaciones lineales constituye el ejemplo más representativo de esta categoría.¹⁴ Los segundos autores suponen, en cambio, que aún en ausencia de shocks exógenos y con modelos de equilibrios rigurosamente formulados —en los que los agentes optimizan con información completa— pueden presentarse fluctuaciones periódicas, semiperiódicas o

¹² En esta lista también encontramos modelos de búsqueda (search models) que generan resultados interesantes como ciclos, caos y equilibrios de manchas solares (Lagos y Wright, 2003)

¹³ En la TSD se reconocen cuatro movimientos que caracterizan la conducta dinámica de cualquier trayectoria, a saber: estado estable o *steady state* (cuando el sistema cesa su movimiento), periódico (cuando el sistema entra en un ciclo límite), semiperiódico (cuando el sistema entra en una mezcla de movimientos periódicos con diferentes frecuencias) y caótico (cuando el sistema entra en dinámica compleja).

¹⁴ En términos generales podemos distinguir tres fases en el desarrollo de los modelos de ciclo endógeno. La primera (1940-1960), que arranca con los trabajos pioneros de Hicks, Kaldor y Goodwin, sienta las bases de la comprensión de la naturaleza endógena de las perturbaciones de los fenómenos económicos pero bajo supuestos conductuales que eran incompatibles con los principios de optimización. La segunda (1960-1985) se caracteriza por suplir la orientación no lineal de los sistemas dinámicos de los anteriores autores en favor de estudios que privilegiaban el uso de sistemas dinámicos lineales y la metodología de Slutsky-Frisch-Tinbergen. Y la tercera (1985-), que es un regreso mejorado a la primera fase, incluye a los trabajos que muestran la persistencia de las fluctuaciones endógenas en modelos de equilibrio donde los agentes optimizan bajo condiciones de información completa.

caóticas. De hecho, algunos de estos autores adscritos a la última generación de modelos de ciclo endógeno aseguran que puede haber modelos con un solo equilibrio perfecto que involucran fluctuaciones continuas, independientemente de las condiciones iniciales, o modelos cuya dinámica no lineal es indeterminada debido a que cuentan con varios equilibrios, entre los cuales hay algunos en los que la economía oscila por siempre (véase Boldrin y Woodford, 1990).¹⁵

Las diferencias entre ambos enfoques se expresan en una utilización diferencial de la TSD. En el primer enfoque, los autores suponen que las perturbaciones no afectan la estructura *simpléctica* de los sistemas hamiltonianos que está detrás de sus métodos de optimización, mientras que en el segundo los autores consideran que no hay nada que garantice que los sistemas hamiltonianos perturbados vuelvan a ser canónicos e integrables.¹⁶ La adhesión a cualquier enfoque conlleva a establecer distintas condiciones de equilibrio.

Los defensores de la idea de que los shocks externos se pueden modelar como fenómenos con movimiento amortiguado asumen que las formas hamiltonianas de las ecuaciones pueden ser canónicamente preservadas después de la perturbación y, por lo tanto, que la optimización de las trayectorias de las variables económicas puede llevarse a cabo sin ninguna alteración. La aceptación tácita de que las perturbaciones no destruyen los toros resonantes del sistema integrable lleva a estos autores a adoptar diferentes versiones del teorema de Turnpike y, en consecuencia, a utilizar los esquemas de optimización y estabilidad de la mecánica hamiltoniana.¹⁷ Por el contrario, quienes consideran que las perturbaciones crean zonas en los espacios fases que son ocupadas por nuevos toros resonantes y órbitas periódicas elípticas e hiperbólicas (tras la destrucción de los toros del sistema integrable), rechazan los postulados del teorema de Turnpike y tratan con hamiltonianos de sistemas perturbados o con modelos físicos de dinámica compleja (véase Brock, 1988 y Scheinkman, 1990).

Ambas posiciones son resultado, también, de la imagen que poseen los autores acerca de la matemática pues, como lo señala Weintraub (2002), la utilización de la TSD en economía depende críticamente del concepto

¹⁵ Paralelo a estos modelos hay otros dos grandes grupos de estudios que terminan de conformar el nuevo enfoque dinámico en economía (en oposición al tradicional que se concentraba en los análisis de equilibrios estables y únicos). El de juegos diferenciales ya visto, que acepta la posibilidad de múltiples equilibrios en torno al conjunto conectado de Nash, y el de modelos estocásticos que incorpora conceptos de estabilidad distintos al de los sistemas determinísticos.

¹⁶ Para una explicación detallada de los conceptos de la TSD utilizados en esta sección véase el apéndice I.

¹⁷ La existencia de equilibrios múltiples deriva del incumplimiento de las condiciones que validan el Teorema de Turnpike. De acuerdo con las diversas variantes de este teorema, si se cumplen algunas condiciones, en particular las relacionadas con el valor del parámetro de preferencia por el consumo, los equilibrios competitivos convergerán a un estado estacionario. Si el valor del parámetro es alto, esto es que la gente prefiere consumir más ahora que en el futuro (se vuelve más impaciente), los equilibrios arrojarán bifurcaciones de cúspide, de mariposa, del tipo Hopf o caos (véase, por ejemplo, Benhabib y Nishimura, 1979).

matemático que tiene el economista. Y éste ha variado conforme a las tendencias dominantes de la matemática, es decir, ha pasado de privilegiar un enfoque dominado por el programa formalista de Hilbert a otro basado en el uso extensivo de los modelos simulados (Davis y Hersh, 1995).¹⁸ En el programa formalista, los economistas han considerado esencial mostrar la existencia de equilibrios únicos y estables en modelos de equilibrio general deducidos de axiomas incuestionables (Weintraub, 2002). Y para tal efecto han desarrollado durante cincuenta años una gigantesca empresa en la que se incluyen los esfuerzos iniciales de Samuelson por introducir las condiciones generales de los equilibrios dinámicos hasta los recientes trabajos de Smale orientados a demostrar la existencia de equilibrios dinámicos competitivos ante cambios en los vectores de precio-estado.¹⁹ Como contraste, han surgido otros economistas matemáticos más orientados a la simulación de modelos que ponen en entredicho la existencia de equilibrios dinámicos únicos y estables. Se trata de economistas que han desarrollado su trabajo al amparo del florecimiento de disciplinas dentro de la TSD que deben su auge al uso intensivo de programas de computadores digitales, tales como la teoría del caos o de fractales (Ott, 2002).

3. Los modelos económicos vistos a la luz de los nuevos avances de la TSD. El principio de población de Malthus

La diversidad de posturas sobre la dinámica en economía tiene, también, efectos sobre las formas de traducir las ideas de las principales corrientes de pensamiento al lenguaje matemático. Quienes encuadran los modelos de crecimiento en mapas invertibles unidimensionales o sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con diagramas fases de dos variables se enfocan, de manera casi forzosa, en determinar la estabilidad y convergencia de las trayectorias en torno a un solo punto crítico o ciclo límite. La razón es que esos modelos no poseen atractores ni estructuras geométricas más complicadas. Por el contrario, quienes modelan trayectorias con dinámica compleja utilizan sistemas de ecuaciones diferenciales (o en diferencias) con dimensión $N \geq 3$ (o $N \geq 2$ para los mapas invertibles) para evaluar, en

¹⁸ Mirowski (2002) sostiene que la historia de la matemática y la economía es, primero, una historia de la física y la economía y, más recientemente, una historia de la ciencia de la información y la economía.

¹⁹ Samuelson introdujo en los años cuarenta del siglo pasado los conceptos de la TSD con la idea de dotar de una estructura dinámica a los equilibrios Walrasianos. Posteriormente hacia finales de los años cincuenta se desarrolló, como un subprograma, el análisis de las condiciones de estabilidad de los equilibrios económicos. En ese afán se incorporaron los conceptos de estabilidad estructural de Poincaré-Bendixon y las técnicas de Liapunov para analizar estabilidad de movimiento o de soluciones. Con esta nueva tecnología matemática algunos autores, como Arrow y Hurwicz, establecieron las condiciones bajo las cuales el equilibrio competitivo era estable (Weintraub, 1991). Tiempo después Scarf y Gale mostraron que la estabilidad no era necesariamente demostrable para cualquier modelo por lo que, según Smale (1998), éste se ha convertido en uno de los dieciocho grandes problemas de la Matemática en este siglo.

determinados tramos de las trayectorias, equilibrios múltiples que resultan de variar ciertos parámetros de las funciones. La resultante estructura geométrica de estos sistemas o mapas es tan variada que abarca desde atractores con dimensión entera hasta atractores extraños o con dimensión fractal.²⁰

La justificación para utilizar determinado sistema o mapa particular es un asunto que no deja de ser debatible, puesto que en cualquier caso hay excesos o arbitrariedades.²¹ Es claro que así como hay una fuerte resistencia de algunos autores a aceptar los resultados de equilibrios múltiples hay otros que se esmeran en probarlos mediante la manipulación de un parámetro. Y eso en lugar de ver a la introducción de la TSD como un motivo de enriquecimiento de la disciplina se vuelve, en algunos casos, un ejercicio forzado y poco científico.

Una posición intermedia es considerar que ninguna herramienta matemática es excluyente por naturaleza si ésta no altera el concepto económico que representan. La combinación de técnicas puede, incluso, ayudar a revelar aspectos de corto plazo que permanecen ocultos en los análisis de estabilidad y convergencia de largo plazo, como queda claro en el estudio del *principio* de población de Malthus que desarrollamos a continuación. De acuerdo con el estudio, la introducción de mapas unidimensionales no invertibles permite encontrar equilibrios malthusianos de corto plazo que no son apreciables en los sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales. Y esto no es, de ninguna manera, un asunto menor si consideramos que hay una tendencia exclusiva de la teoría tradicional del

²⁰ Las estructuras de las trayectorias son más complejas entre más grande sea la dimensionalidad del sistema. En sistemas con $N < 3$ ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden las trayectorias convergen o divergen en torno a un atractor de dimensión cero (un solo punto) o dimensión uno (curvas cerradas). Los modelos básicos de Solow y Ramsey son, por ejemplo, sistemas continuos de dimensión $N = 2$ que arrojan atractores de un solo punto en el espacio fase, propios de los equilibrios de *steady state*. En sistemas continuos con $N \geq 3$ las trayectorias exhiben una estructura geométrica más complicada que en los casos anteriores debido a la presencia de atractores extraños o con dimensión no entera. Para los sistemas discretos, la dinámica compleja se observa cuando $N \geq 2$ si los mapas son invertibles o $N \geq 1$ si no son invertibles, como es el caso de la ecuación logística. Un mapa M es invertible si dado para cada valor de x_n es posible derivar uno y solo un valor de x_{n+1} ; esto es: $x_{n+1} = M(x_n)$. En caso contrario, el mapa no es invertible.

²¹ No obstante que la TSD ha enriquecido el análisis dinámico de los fenómenos económicos es importante hacer notar que su utilización no está exenta de críticas. La introducción de funciones *ad hoc* en los modelos originales de crecimiento o la manipulación de algunos parámetros —como el de la tasa de descuento— más allá de cierto umbral han dado lugar a teoremas anti-turnpike que tienen poca relevancia económica. La sugerencia, por ejemplo, de Day (1982) de modificar la función de producción del modelo de Solow utilizando una ecuación logística para medir, entre otras cosas, el efecto polución o la variabilidad de la tasa de ahorro sobre las trayectorias de acumulación del capital es una “petición de principio” que deja muchas dudas. Y es que, como veremos más adelante, la ecuación logística es un mapa no invertible que de suyo presenta dinámica compleja en cierto rangos de r_0 , por lo que no queda claro si es la forma funcional o el impacto de las variables las que producen la dinámica compleja.

crecimiento económico a considerar el *principio* de población en su perspectiva de largo plazo.

Pero aquí hay que aclarar que, lejos de utilizar las herramientas de la TSD por convención o moda, combinamos las técnicas para explicar los dos niveles de análisis del *principio* de población. En concreto utilizamos los sistemas dinámicos continuos para establecer las condiciones del equilibrio de subsistencia en el largo plazo y mapas no invertibles para analizar las variaciones en torno a ese equilibrio en el corto plazo; tal como está expuesto en los dos primeros capítulos del *Ensayo*. En el primer nivel (largo plazo) se emplean soluciones gráfico cualitativas de dos variables que interactúan en esquemas de crecimiento del tipo Lotka-Volterra, mientras que en el segundo (corto plazo) se usan mapas unidimensionales que dependen de las dos variables (en la que una de las dos, la de medios de subsistencia, se mantiene fija en ciertos intervalos). Los resultados son, en cierta manera, novedosos porque, contrario a la percepción tradicional, se muestra que el equilibrio presentado por Malthus en el *Ensayo* no es de dimensión cero y estable sino, en ciertos tramos, fraccionario e inestable.

3.1. El principio de población de Malthus en el largo plazo

En su *Ensayo sobre el principio de población* Malthus (1777) describe la carrera entre la producción de alimentos y la cantidad de humanos que hay que alimentar con base en un arreglo numérico nada proporcional; es decir, mientras la primera crece aritméticamente la segunda lo hace en forma geométrica. Y así cualquier sociedad, agrega Malthus, está condenada a vivir al nivel de la subsistencia. El *principio* de población regula la competencia entre las dos variables mediante diversos mecanismos económicos, sociales y demográficos.

Puesto en términos formales el *principio* puede ser, en parte, explicado con la ayuda de la ecuación logística de Verhulst:

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP(t)^2 \quad (1)$$

donde P es la población y a y b son constantes no negativas que representan, respectivamente, las tasas medias de natalidad y mortalidad. De acuerdo con (1), la población crece de manera exponencial según la trayectoria marcada por

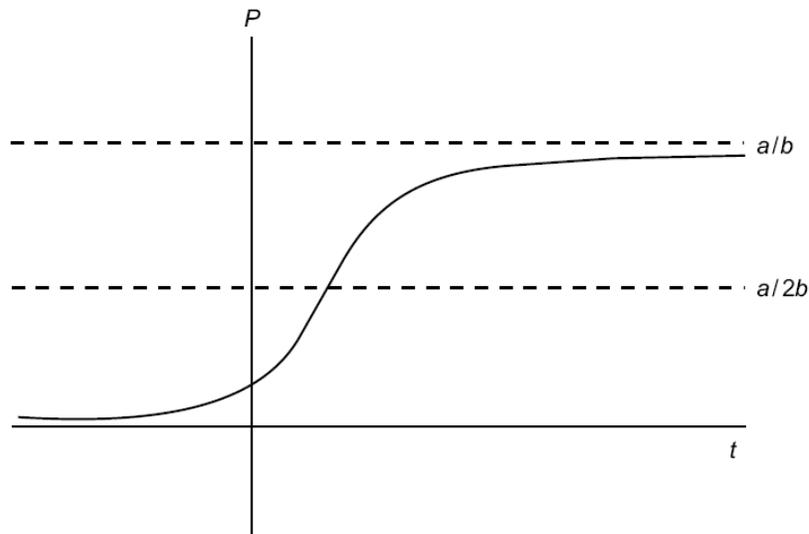
$$P(t) = \frac{aP_0/(a - bP_0)}{[bP_0/(a - bP_0)] + e^{-at}} \quad (2)$$

que es precisamente la solución particular a (1) con $P(0) = P_0$. Los límites al

crecimiento de (2) están fijados en la figura 1 por $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{a}{b}$ y por

$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = 0$, que dan la consabida forma de S a la curva de Verhulst. La constante $a/2b$ es la cota mínima de individuos que garantiza el reemplazo de la población. El nivel de esta cota es variable y depende del tipo de especie en consideración.

FIGURA 1. LA CURVA DE VERHULST



El segundo componente a la derecha de la ecuación (1), $-bP^2$ con $b > 0$, es llamado el factor de inhibición o de competencia que, en terminología de Malthus, es regulado por los frenos positivos —enfermedades, hambrunas y malnutrición— operantes en caso de un exceso relativo de la población. Estos frenos se activan al bajar los niveles de subsistencia y junto con los preventivos —reducción voluntaria de la fecundidad o retraso en la edad del matrimonio— actúan como contrapeso a la “pasión de los sexos”. El primer componente, aP con $a > 0$, es, por su parte, el factor de expansión de la población que Malthus considera una función positiva de los medios de subsistencia, S , y como una función negativa de los frenos preventivos. El resultado final de la acción de ambos componentes está determinado por un mecanismo del tipo Lotka-Volterra representado por el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= r_0 P(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right] & (3) \\ \frac{dS}{dt} &= \gamma S \\ P_0 &= S_0 = K \end{aligned}$$

La primera ecuación del sistema (3) no es más que una variante de (1), en la que la población crece a una tasa instantánea $r_0 = a - b$, acotada por K , mientras que la segunda ecuación representa el postulado malthusiano de que S crece a una tasa aritmética γ .²² La pendiente de la curva solución del sistema expresa la razón de cambio de P ante un incremento en S o, dicho de otra manera, indica que el crecimiento exponencial sugerido por Malthus es una función exclusiva de las tasas de mortalidad y natalidad (no hay migración), y éstas a su vez de S . "Population is food controlled", como correctamente señala Keifitz (1983, p. 3).

El par de soluciones linealmente independientes ($r \neq \gamma$) obtenidas en (4) tras linealizar el sistema (3) dan como resultado la curva de Verhulst con pendiente $\frac{c_2 B e^{(\gamma-r_0)t}}{c_1 A}$ en un tramo de la figura 2.²³ En efecto, si $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ y $A \neq 0$, la curva crecerá por encima de K en el intervalo en que $\gamma \geq r_0 \geq 0$. Fuera de ese intervalo la curva experimentará un decrecimiento en su segundo tramo que la llevará de regreso hasta K en virtud de que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S}{P} = 0$.

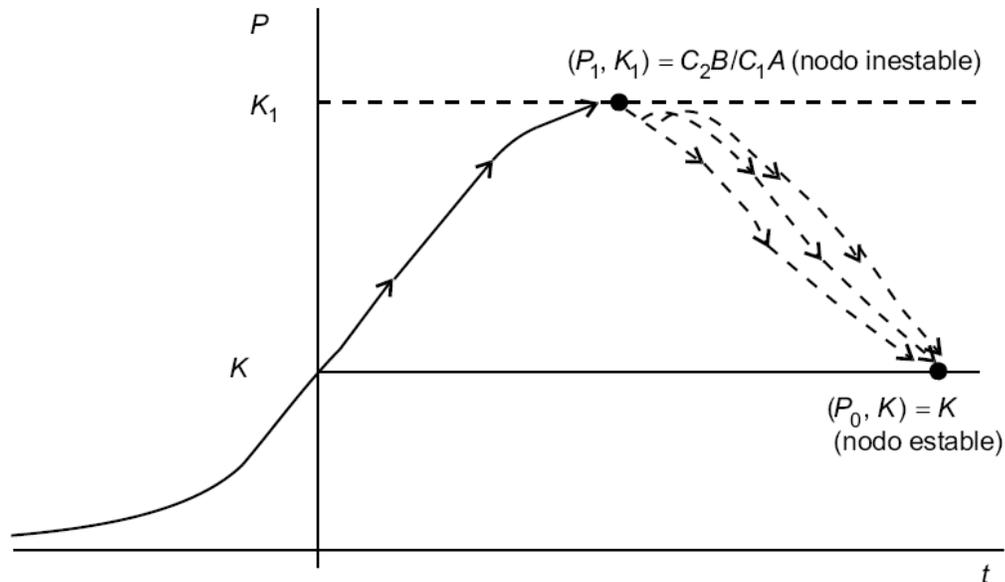
$$\begin{aligned} P &= c_1 A e^{r_0 t} \\ S &= c_2 B e^{\gamma t} \end{aligned} \quad (4)$$

²² En rigor la tasa de crecimiento de los medios de subsistencia crece en (3) como una recta con ordenada al origen y pendiente igual a γ . Se pueden ensayar otras variantes con ordenadas distintas de cero y valores de S igual a cualquier constante, con resultados similares.

²³ La linealización de (3) es posible debido a que el valor del determinante de los coeficientes es diferente de cero (de hecho es positivo e igual a $r_0 \gamma$) y a que

$$\lim_{(P,S) \rightarrow (0,0)} \frac{bP^2}{\sqrt{P^2 + S^2}} = 0.$$

FIGURA2. EQUILIBRIO MALTHUSIANO



La nueva curva solución tiene una condición inicial y dos supuestos de comportamiento que regulan su crecimiento. La condición inicial $P_0 = S_0 = K$ significa que hay un estado del desarrollo en el cual el ingreso de la sociedad es apenas suficiente para garantizar el reemplazo de una población cerrada (o de crecimiento natural nulo). En la figura 2 ese estado está representado por la cota K , en que la tasa de mortalidad es igual a la de la natalidad en el “piso de subsistencia”.²⁴

Los dos supuestos de comportamiento se refieren, a su vez, a los componentes clave del modelo malthusiano (véase Galor y Weil, 2000): la relación positiva entre las subsistencias y el crecimiento de la población:²⁵

$$\frac{dP}{dS} = \frac{r_0 P(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right]}{\gamma S} > 0 \quad (5)$$

y la existencia de la ley de rendimientos decrecientes:

²⁴ Desde el punto de vista demográfico, una población con estas características corresponde a una población de tipo estacionario, en la que la tasa de mortalidad (b) es igual al recíproco del valor de la esperanza de vida al nacer (e^0): $b = 1/e^0$.

²⁵ Se cumple para $P(t) < K$, pero cuando $P(t) > K$ tenemos $\frac{dP}{dS} = \frac{r_0 P(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right]}{\gamma S} < 0$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r_0 - \frac{2r_0P(t)}{K} < 0 \quad (6)$$

La manera en que estos supuestos entran en acción es mediante los cambios en S . Para observar esto supongamos, por ejemplo, que por efecto de un mejoramiento técnico en la dotación inicial de tierras, la productividad del trabajo de la sociedad crece a tal grado que el nivel de subsistencia experimenta un desplazamiento de K a K_1 en la figura 2. El consecuente incremento en la proporción media de subsistencias inducirá a los habitantes, según las ecuaciones de (4), a incrementar su número a una tasa $\frac{c_2Be^{(\gamma-r_0)t}}{c_1A}$ hasta el punto en que la población vuelva a ser otra vez

completamente elástica con respecto al nuevo nivel de subsistencia $K_1 = \frac{c_2B}{c_1A}$.

En ese intervalo, la mayor influencia de (5) que de (6) garantizará que el componente aP domine al componente $-bP^2$ en la ecuación (1).

La bonanza, dice Malthus, se perpetuará hasta que aparezca la presión de una mayor población sobre la frontera agrícola. Una vez presente la presión, los mecanismos comandados por la ley de rendimientos decrecientes revertirán el círculo virtuoso establecido inicialmente entre el crecimiento del ingreso y el demográfico. Los precios más altos de los alimentos ocasionados por la mayor cantidad de esfuerzo requerido para producir una unidad de producto, aunado a un descenso en el salario de mercado (resultante de una oferta de trabajo incrementada por el crecimiento del periodo precedente), activarán los frenos preventivos y positivos.

Ante una disminución en S la población reducirá drásticamente su crecimiento, no sólo por el mayor número de muertos debido a malnutrición o enfermedades sino por el deseo voluntario de las familias de retrasar la edad de matrimonio y, por ende, de tener menos hijos. La combinación de (5) y (6) hará que el componente cuadrático de la primera ecuación del sistema (3) se aproxime más rápido a cero que el componente lineal y que, por tanto, la caída de r sea más violenta que la de γ en todo el trayecto de regreso al nivel de subsistencia original, K . Con un valor negativo mayor de r que de γ , el

valor del exponente de $\frac{c_2Be^{(\gamma-r_0)t}}{c_1A}$ será negativo y su límite, a medida que

$t \rightarrow \infty$, tenderá a converger a cero.

La diferencia entre la ecuación (1) y el sistema (3) es que, mientras en la versión original de Verhulst no hay posibilidad de regreso al estado estacionario inicial, en el esquema malthusiano cualquier cambio positivo [cuando $P(t) < K$] o negativo [cuando $P(t) > K$] del crecimiento de la población será temporal y asintótico al nivel de K . La explicación formal

reside en las peculiares condiciones de estabilidad y convergencia que se presentan en torno a la vecindad del punto crítico (P_0, K) y que no son reproducibles, por ejemplo, en el punto de bifurcación (P_1, K_1) de la gráfica 2. El análisis del polinomio característico del sistema lineal asociado a (3), $\lambda^2 - (r_0 + \gamma)\lambda + r_0 y = 0$, revela que aun cuando los eigenvalores en la vecindad de (P_0, K) y (P_1, K_1) son reales y diferentes, en (P_1, K_1) éstos son positivos, lo que significa que tanto en el sistema lineal como en el no lineal ese punto es un nodo inestable. En cambio en la vecindad de (P_0, K) los dos eigenvalores son negativos y distintos, lo que garantiza que los sistemas convergerán asintóticamente a ese punto configurando un nodo estable.

La validez de este resultado no se alteraría ni aun con la presencia de progreso técnico exógeno ya que, en este caso, el crecimiento del ingreso sería absorbido en la misma proporción por un contingente adicional de población. El nuevo equilibrio resultante estaría situado a un nivel superior de K pero con la misma pendiente, en una cantidad exactamente igual al valor del parámetro tecnológico que se tome de referencia. A esta situación, en la que el ingreso *per capita* no cambia, aun con la presencia de un crecimiento tecnológico exógeno, se le conoce como trampa malthusiana (Blanchet, 1991). Para resumir lo anterior podemos decir que en este mundo malthusiano "...sin progreso técnico y rendimientos marginales decrecientes del trabajo con respecto a un factor tierra fijo, la existencia de un estado de equilibrio estacionario, en el cual el consumo es mantenido al nivel de subsistencia, es inexorable..." (Srinivasan, 1993, p. 470).

3.2. Las oscilaciones del equilibrio malthusiano en el corto plazo
El modelo original de Malthus arroja un equilibrio de largo plazo que es bien capturado por la solución gráfico-cualitativa del sistema (3). El problema es que ese equilibrio no da cuenta de todas las trayectorias que se presentan cuando se modifican los valores de γ y r_0 en ciertos rangos y que Malthus considera en su Ensayo como oscilaciones.²⁶ Para lograr una interpretación más fidedigna de esas oscilaciones es importante realizar un análisis de corto plazo que contemple el espectro de cambios descritos por el autor. El primer paso consiste en adoptar la siguiente versión discreta del sistema (3) con el

²⁶ En el capítulo II de su *Ensayo* Malthus se refiere a las oscilaciones como los movimientos retrógrados y progresivos que experimenta el bienestar de la población alrededor del "piso de subsistencia". La duración y amplitud de esas oscilaciones varía en cada sociedad de acuerdo con las condiciones económicas de las diferentes clases sociales, la efectividad de las causas interruptoras del crecimiento de la población (tales como: la introducción o fracaso de ciertas manufacturas, el mayor o menor grado de iniciativa de las empresas agrícolas, los años de abundancia o escasez, las guerras y las epidemias, entre otras) y, en especial, la diferencia entre el precio nominal y el precio real del trabajo. Huelga decir que esas oscilaciones vienen asociadas con diversas tasas de crecimiento de la población.

fin de enfocar la atención sobre las condiciones de crecimiento que garantizan la existencia de diferentes estados de desarrollo, incluyendo el estacionario:

$$P_{t+1} = P_t \left[r_0 + 1 - \frac{r_0 P_t}{K} \right] \quad (3.1')$$

$$S_{t+1} = [1 + \gamma] S_t \quad (3.2')$$

$$P_0 = S_0 = K$$

Para simplificar el análisis supondremos, como segundo paso, que $K = \Delta S = S_{t+1} - S_t$ en cada punto del tiempo, de tal suerte que el sistema queda reducido a un mapa unidimensional no invertible en el que K crece a la tasa γ ;²⁷ esto es que: $P_{t+1} = P_t \left[r_0 + 1 - \frac{r_0 P_t}{K} \right] = P_t \left[r_0 + 1 - \frac{r_0 P_t}{\Delta S} \right]$.²⁸ La ecuación resultante es muy parecida a la logística $P_{t+1} = r P_t [1 - P_t]$ salvo por el hecho de que mientras esta última depende sólo de r_0 aquella es una función de K y r_0 . La diferencia no es trivial, pues la incorporación de una nueva variable, K , modifica la naturaleza y estabilidad de los puntos fijos de la ecuación logística original (véase apéndice 2).

Consideremos ahora, como tercer y último paso, un aumento en la tasa de crecimiento de los medios de subsistencia (con $K = 1$ para describir el estado estacionario) y comparemos los resultados haciendo variar r_0 . Lo primero que observamos es que la población registra patrones de crecimiento diferentes a los generados por el sistema (3). En caso que $r_0 < K$ (ver figura 3), la población crece a tal ritmo que en un periodo no mayor a cinco iteraciones absorbe el exceso relativo de medios de subsistencia hasta volver al estado estacionario. Pero cuando $r_0 > K$ las oscilaciones descritas por Malthus surgen de una manera clara a partir de cierto umbral. Las figuras 4 y 5 muestran que con valores de $r_0 > 2$ la dinámica del crecimiento de la población se vuelve cada vez más compleja a medida que los valores de K disminuyen de 1.7 a 1.45. En ambas situaciones la población pasa de experimentar un crecimiento con ciclos de periodo dos a otro con comportamiento caótico.

¿Qué significado tienen estos movimientos en el esquema conceptual de Malthus? La respuesta puede aclararse más con la ayuda de un diagrama de

²⁷ En rigor $\Delta S = \gamma S_t$ pero como S_t es la cantidad de medios de subsistencia base sobre la que se estima la tasa de crecimiento es común normalizarla o igualarla a 1.

²⁸ El supuesto significa que la población utiliza en cada momento la totalidad de la carga del ecosistema como medios de subsistencia. A diferencia de lo que sucedía con el sistema (3), K no es el "tope" potencial o nivel máximo de los medios de subsistencia sino su tasa instantánea de crecimiento real. En términos del principio de Malthus, el supuesto implica que la tasa de reproducción de la población está limitado, en cada momento, por la tasa de crecimiento efectiva de la economía (representada por los medios de subsistencia) y que cualquier situación de sobrepoblamiento o subpoblamiento es explicada únicamente por las diferencias relativas de ambas tasas.

bifurcación. De acuerdo con la figura 6, la población experimenta diversos patrones de crecimiento dependiendo de los valores de r_0 y K . El primer patrón observable es el estado *estacionario* o la línea horizontal formada por el conjunto de trayectorias que convergen a $K=1$ cuando $K > r_0$ y $r_0 \in [1,2]$. Se trata de la misma solución de largo plazo ofrecida por el sistema (3) una vez que la población ajusta sus expectativas de bienestar (derivadas de un aumento en K) a la creciente presión demográfica. El equilibrio no es, empero, homogéneo para toda la población pues debido a la diferente intensidad con que operan los movimientos retrogradados y progresivos en las clases sociales es posible observar crecimientos demográficos diferenciales.

FIGURA 3. PATRÓN DE CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN CUANDO $K_1 = 1.7$ Y $r_0 = 1$

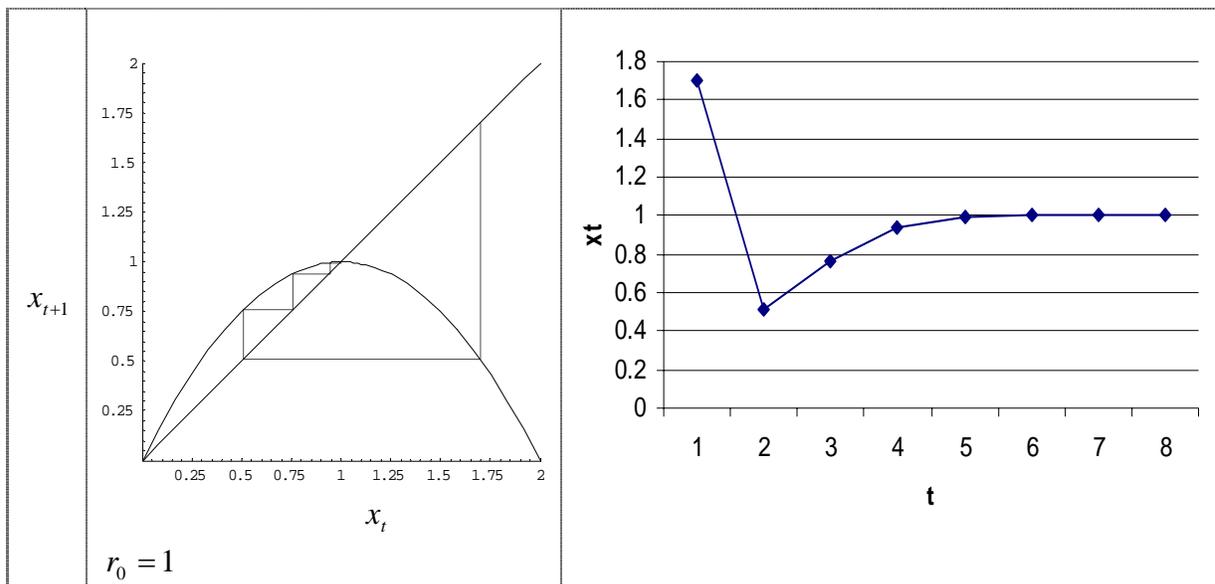


FIGURA 4. CRECIMIENTO DE P_t CON CICLOS DE PERIODOS DOS ($K_1 = 1.45$ y $r_0 = 2.1$)

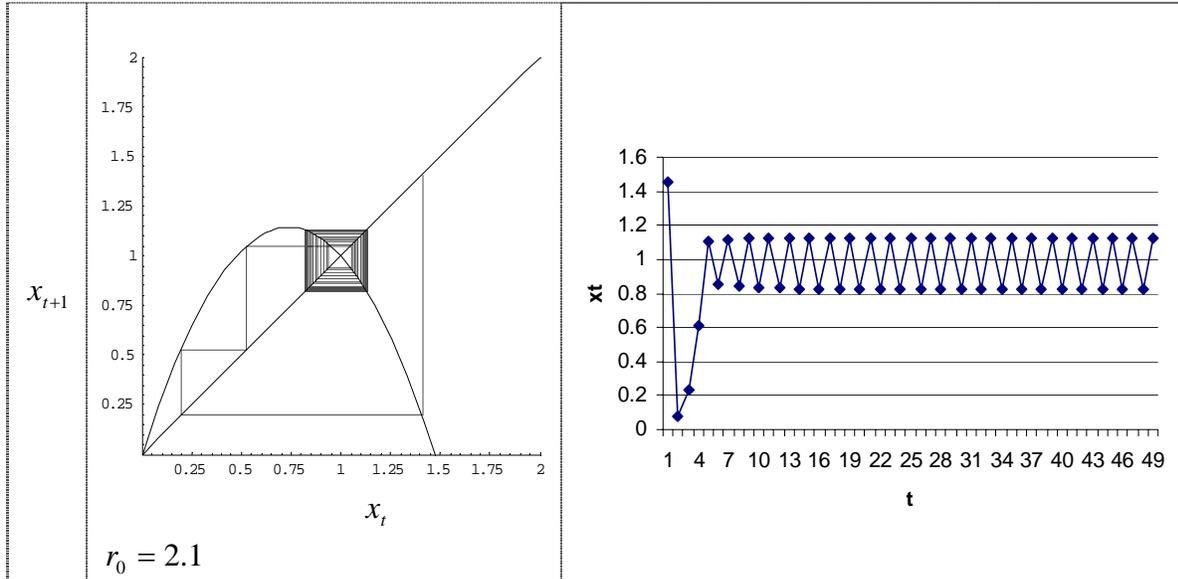


FIGURA 5. COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE P_t ($K_1 = 1.26$ y $r_0 = 2.88$)

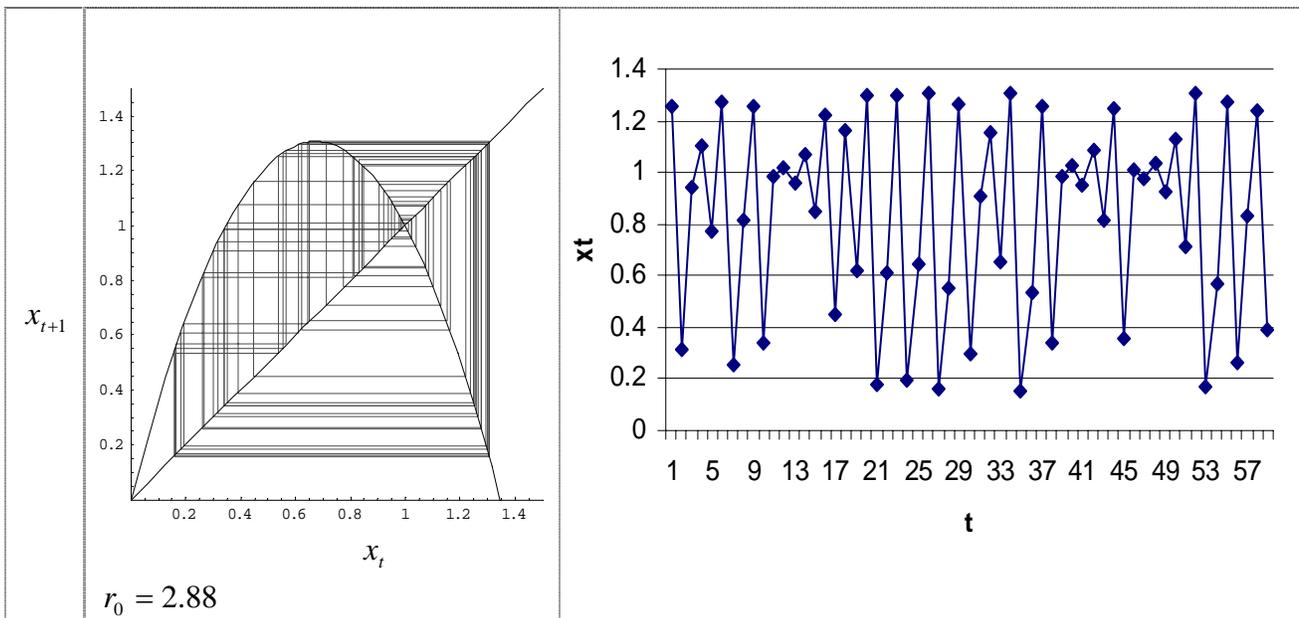
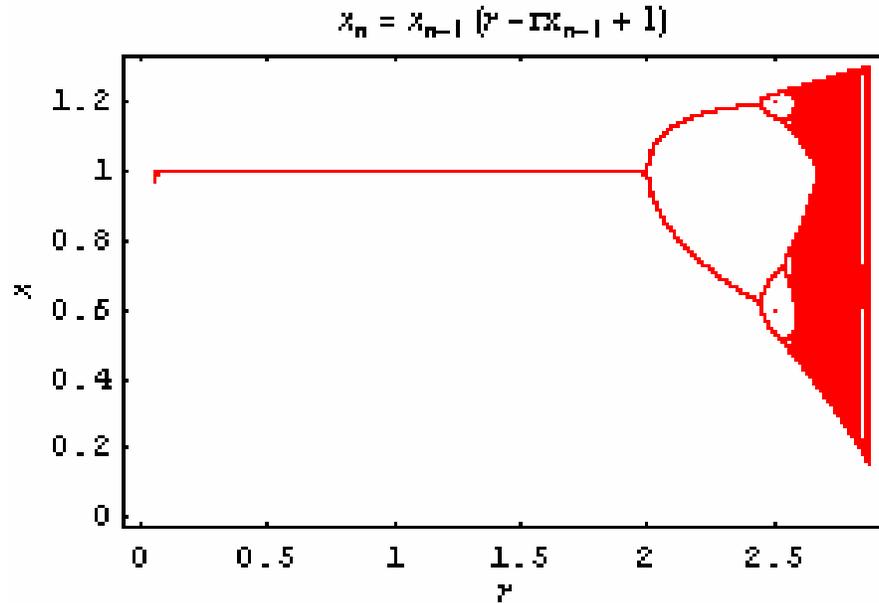


FIGURA 6. DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN PARA VALORES DE $r_0 \in [0.05, 2.88]$



La distinta proporción entre el número de adultos y el de matrimonios en cualquier sociedad, la diversidad de tasas de mortalidad infantil entre la gente pobre y rica o las variaciones en el precio efectivo del trabajo entre los asalariados son factores que, según Malthus (1978, p. 17), producen “movimientos de retroceso o avance” en determinados estratos de la población con respecto a $K = 1$. Los movimientos se expresan en crecimientos múltiples de la población por debajo o por encima del “piso de subsistencia” y dan lugar a un segundo tipo de patrón caracterizados por órbitas de periodos dos y cuatro cuando r_0 es incrementada de 2 a 2.5.

La diferenciación tiene, sin embargo, sus límites ya que cuando $r_0 \in (2.5, 3)$ las oscilaciones pierden regularidad respecto al estado estacionario. En ese intervalo, “los obstáculos que reprimen la capacidad superior del aumento de la población y mantienen sus efectos al nivel de subsistencia” (Malthus, 1978, p. 19) pierden su efectividad y la abstención moral, los vicios y la miseria dan lugar a crecimientos con ventanas de periodos tres o caos visible. El efecto contrarrestante de un aumento en la tasa de crecimiento de los medios de subsistencia puede revertir las irregularidades del equilibrio malthusiano pero sólo momentáneamente. La razón es que, tal como está planteada la ecuación (3.1'), no hay manera de evitar el comportamiento caótico con valores crecientes de r_0 , en particular cuando $r_0 \geq 3$.

En concreto el diagrama revela tres aspectos importantes del *Ensayo*: primero, que el equilibrio de largo plazo es válido sólo para valores de K

ligeramente superiores a r_0 y $r_0 \in [1,2]$; segundo, que las diferencias demográficas por clases sociales producen trayectorias oscilatorias alrededor del "piso de subsistencia" cuando $2 < r_0 < 2.5$; y tercero, que las oscilaciones pierden regularidad para valores de $r_0 > 2.5$ a tal extremo que degeneran en comportamiento caótico una vez que r_0 es superior a 3 (con cualquier valor de K).

Conclusiones

El documento hace hincapié en la notable expansión de conocimiento matemático en la economía a raíz de la extensiva utilización de la TSD en dieciséis de sus subdisciplinas. La expansión ha sido, sin embargo, diferencial, debido en parte a la desigual resistencia de los autores por aceptar sistemas de optimización que arrojan únicamente equilibrios de *steady state* y, en parte, a la disímula concepción que ellos tienen de la función de la matemática en economía. El resultado en cualquier caso ha sido espectacular, pues casi 25% de los artículos centrales publicados entre 1990 y 2004 en las cuatro revistas más importantes de economía incluye alguna variante de los análisis dinámicos, es decir, más del doble del porcentaje registrado durante la década de 1980 a 1990 en revistas como ECO y JPE.

La nueva escalada matemática obliga a una comprensión detallada de algunas áreas de la TSD para no quedar al margen de la disciplina, sobre todo por el breve periodo (de 3 a 5 años) que media entre la publicación de un artículo en una revista internacional y su incorporación en los libros de texto. Las consecuencias para la enseñanza de la economía pueden ser funestas si no existe un programa de enseñanza gradual en esas áreas. En particular porque los requerimientos matemáticos y computacionales que exige la TSD no están limitados a las áreas *naturalmente* dinámicas sino que abarca también a las caracterizadas por los análisis estáticos.

¿Qué tan pertinente o benéfico es este nuevo giro de la matemática en economía? Las respuestas son diversas e incluso contrarias. Hay quienes aseguran, como Krugman (1998) o Backhouse (1988), que cualquier esfuerzo útil de formalización es necesario para el progreso de la disciplina y otros, como Chick (1998), que la axiomatización por sí sola es incapaz de explicar el funcionamiento de sistemas complejos cuyo conocimiento es parcial e incierto. La polémica es muy vieja y con cada oleada de nuevo conocimiento matemático se vuelven a discutir las mismas preguntas: ¿cuál es la mejor base matemática para modelar la conducta de los agentes (análisis real vs. teoría de juegos)?; ¿es posible entender un sistema económico con esquemas formales cerrados o abiertos (modelos de equilibrio general vs. modelos computables)?, o, ¿es sano impulsar la formalización sin atender la base empírica de los fenómenos económicos (economía teórica vs. economía aplicada)?

Independientemente de la utilidad que tiene esta polémica en la fundamentación epistemológica de la disciplina, hay un tema que siempre es importante tratar por separado debido a su impacto directo en la enseñanza de la economía. Nos referimos al efecto de la utilización de nueva tecnología matemática, en este caso de la TSD, sobre el contenido temático de la economía. Y sobre este tema llegamos a las siguientes cuatro conclusiones

que, según nuestro punto de vista, es importante tomar en cuenta al momento de justificar el aprendizaje de la TSD en las universidades: (1) hay una creciente interrelación de subdisciplinas como resultado del establecimiento de nuevos equilibrios dinámicos; (2) existen nuevas áreas de conocimiento que se desarrollan precozmente gracias a la TSD; (3) es más complejo el significado dinámico de los equilibrios en las subdisciplinas tradicionalmente caracterizadas por análisis estáticos, y (4) la utilización combinada de técnica de la TSD es esencial para entender los nuevos significados de los equilibrios dinámicos en economía si y sólo si no se altera el significado original del concepto económico. La modelación del *principio* de población ilustra este último punto al mostrar la existencia de equilibrios con atractores no contemplados por la teoría demográfica convencional a pesar de estar explícitamente analizados por Malthus en el *Ensayo*.

Apéndice 1

Propiedades básicas de los sistemas hamiltonianos

Los análisis dinámicos en economía se basan en la optimización de sistemas hamiltonianos debido, entre otras cosas, a que el principio de Hamilton no sólo es aplicable a cualquier formato de optimización dinámica sino también a cualquier tipo de ambiente, determinístico o estocástico. Esta cualidad generalizadora permite a los economistas echar mano de todo el desarrollo teórico de optimización de trayectorias perturbadas procedente de la física y la TSD. No en vano el principio de Hamilton "es el teorema individual más fundamental e importante de la física matemática" (Fox, 1987, p. 111).

En concreto, la dinámica de un sistema hamiltoniano está completamente definida por la función $H(p_i, q_i, t)$ conocida como el hamiltoniano, con $i = 1, 2, \dots, N$, donde N es el número de grados de libertad del sistema. Las ecuaciones de Hamilton que determinan las trayectorias de los "momentos generalizados" $p_i(t)$ y las "posiciones" $q_i(t)$ que sigue el sistema en el espacio

fase $2 - N$ dimensional están dadas por: $\frac{dp_i}{dt} = -\partial H(p_i, q_i, t) / \partial q_i$ y $\frac{dq_i}{dt} = \partial H(p_i, q_i, t) / \partial p_i$. Conceptualmente el hamiltoniano es la energía total

(E) que se expresa como la suma de la energía cinética (T) más la energía potencial ($E = T + V$). Cuando el hamiltoniano es independiente del tiempo se puede demostrar que $\frac{dH}{dt} = 0$ o que el sistema es conservativo, es decir

que $E = H(p_i, q_i) = \text{constante}$. Un sistema dinámico con estas características posee una estructura simpléctica debido a que la forma diferencial de la

integral invariante de Poincaré es cero, esto es que: $\frac{d}{dt}(\delta p_i \cdot \delta q_i - \delta q_i \cdot \delta p_i) = 0$. Esta última condición implica que los volúmenes en los espacios fases $2N$ dimensionales son conservados o, puesto en términos de la integral de Poincaré-Cartan, que la "acción integral" alrededor de una curva inicial cerrada (que contiene un tubo de trayectorias) tiene el mismo valor que en la curva final cerrada (y con el mismo tubo de trayectorias).

En caso que se perturbe un sistema conservativo pueden presentarse cualesquiera de las siguientes dos situaciones: que el sistema perturbado conserve la estructura simpléctica mediante una transformación canónica, o que el nuevo sistema deje de ser integrable. En la primera situación basta introducir un cambio arbitrario de variables para que se preserven las formas

originales de las ecuaciones. Cuando este cambio es posible se dice que la transformación es canónica y que los vectores de "posición" y de "momentos generalizados" están *canónicamente conjugados*. El sistema resultante: 1) conserva el volumen de los espacios fases porque satisface el teorema de recurrencia de Poincaré, en el que se establece que algunos puntos del espacio fase que se "escapen" de la bola cerrada inicial R_0 con radio $\varepsilon > 0$ regresarán invariablemente a ella después de un tiempo suficiente sin importar cuán pequeño sea ε ; y 2) es integrable porque tiene N constantes globales independientes que corresponden a la función de movimiento de H , denotada por $f_i(p_i, q_i); i = 1, 2, \dots, N$ con $f_1(p_i, q_i) = H(p_i, q_i)$. Esta última condición de integrabilidad implica que la trayectoria del sistema en el espacio fase está restringida a permanecer en la superficie de un toro N dimensional $f_i(p_i, q_i) = k_i$.

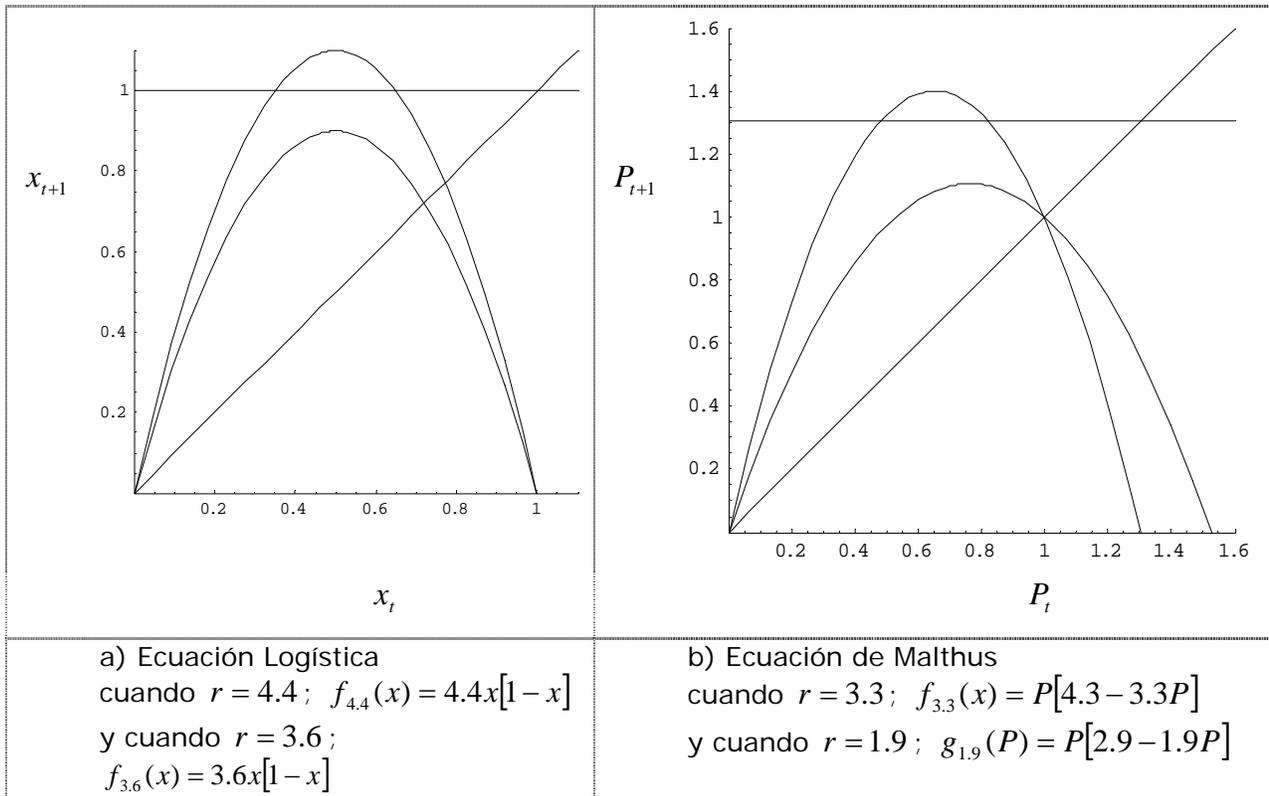
En la segunda situación, las constantes del sistema integrable o no perturbado $H_0 = (p_i, q_i)$ tenderán a ser destruidas a medida que ε tome valores significativamente diferentes de cero en el componente $\varepsilon H_1 = (p_i, q_i)$ que incorpora la perturbación. La razón radica en que sólo para valores pequeños de ε es posible garantizar, de acuerdo con el teorema de Kolmogorov, Arnold y Moser (KAM), la sobrevivencia de toros resonantes del sistema no perturbado y, con ello, la integrabilidad del sistema perturbado $H(p_i, q_i) = H_0(p_i, q_i) + \varepsilon H_1(p_i, q_i)$. De lo contrario, el volumen del espacio fase del sistema perturbado que no es ocupado por toros sobrevivientes sería muy grande y nunca se acercaría a cero (en el sentido de la medida de Lebesgue) a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$; es decir, el espacio fase sería ocupado por toros resonantes perturbados, orbitas caóticas y orbitas periódicas hiperbólicas y elípticas, en una palabra por *fractales gordos*.

Apéndice 2

Diferencias básicas entre la ecuación logística y la ecuación de Malthus

La ecuación logística alcanza su máximo valor en $P_t\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4}$ y, debido a su total dependencia de r , sus estados estables $P_{t+1}(r) = \frac{r-1}{r}$ tienden a experimentar modificaciones ante cambios en ese parámetro. La situación para (3.1') es distinta pues, para empezar, esta ecuación alcanza su máximo valor en $P_t\left(K\left(\frac{r+1}{2r}\right)\right) = K\frac{(r+1)^2}{4r}$; cuenta con un estado estable $P_t = K$ que es independiente de r ; y tiene un límite absoluto en el tamaño de la población dado por $P_t = K\left(\frac{r+1}{r}\right)$, que es superior al marcado por la logística. Estas diferencias se traducen en un comportamiento caótico precoz en (3.1'), con $r \geq 3$, que en la ecuación logística, con $r \geq 4$, así como en una mayor variabilidad en el límite máximo de la población. La figura 7 enfatiza este último aspecto al mostrar cómo la ecuación de Malthus disminuye el límite máximo de P_t a medida que se incrementa r , mientras que la ecuación logística mantiene inalterado dicho límite. Las líneas horizontales representan el máximo límite de la población.

FIGURA 7. DIFERENCIAS ENTRE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA Y LA ECUACIÓN DE MALTHUS PARA DIVERSOS VALORES DE r_0



Bibliografía

- ARROW, K. y INTRILIGATOR, M. (Ed.) (1991). "Historical Introduction". *Handbook of Mathematical Economics*, vol.1, North Holland, New York pp. 1-14.
- BACKUS *et al.* (1992). "International Real Business Cycles". *Journal of Political Economy*, vol. 100, Issue 4, pp. 745-75.
- BACKHOUSE, R. (1998). "If Mathematics is Informal, Then Perhaps We Should Accept That Economics Must Be Informal Too". *The Economic Journal*, vol. 108 (451), pp. 1848-1858.
- BENHABIB, J. y NISHIMURA, K. (1979). "The Hopf Bifurcation and The Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth". *Journal of Economic Theory*, vol. 21, pp. 421-444.
- BENHABIB, J. y PERLI, R. (1994). "Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth". *Journal of Economic Theory*, vol. 63, Issue 1, pp. 113-142.
- BHATIA, N. y SZEGÓ (2002). "Stability Theory of Dynamical Systems". Springer-Verlag, Berlin.
- BHASKAR, V. y DAMME E. (2002). "Moral Hazard and Private Monitoring". *Journal of Economic Theory*, vol. 102, Issue 1, pp. 16-39.
- BLANCHET, D. (1991). "Modélisation Démo-Economique. Conséquences économiques des évolutions démographiques". Presses Universitaires de France. Institut National d'Études Démographiques, Paris.
- BOLDRIN, M. y MONTRUCCHIO, L. (1995). "Acylicity and Dynamic Stability: Generalizations and Applications". *Journal of Economic Theory*, vol. 65, Issue 2, pp. 303-326.
- BOLDRIN, M. y RUSTICHINI, A. (1994). "Growth and Indeterminacy in Dynamic Models with Externalities". *Econometrica*, vol. 62, Issue 2, pp. 323-342.
- BOLDRIN, M. y WOODFORD, M. (1992). "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey". In Benhabib, J. (ed). *Cycles and chaos in economic equilibrium*. Princeton University Press, New Jersey, pp. 44-63
- BRAV, A., CONSTANTINIDES, G. M. y GECZY, C. C. (2002). "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and Limited Participation: Empirical Evidence". *The Journal of Political Economy*, vol. 110, no. 4, pp. 793-824.
- BROCK, W. A. (1988). "Nonlinearity and Complex Dynamics in Economics and Finance". In *The economy as An Evolving Complex System*, Santa Fe Institute Series in Complexity, 3, P. Anderson, K arrow and D. Pines (eds.) Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 77-97.
- BROWN, D. J. y ROBINSON, A. (1974). "A Limit Theorem on the Cores of Larger Standard Exchange Economies". *Proceedings of the national academy of sciences of the USA*. Vol. 69, pp. 1258-1260.
- CHICK, V. (1998). "On Knowing One's Place: The Role of Formalism in Economics". *The Economic Journal*, vol. 108 (451), pp. 1859-1869.
- DAY, R. H. (1982). "Irregular Growth Cycles". *American Economic Review*, vol. 72, pp. 406-414.
- DEBREU, G. (1984). "Economic Theory in the Mathematical Mode". *The American Economic Review*, vol. 74, no. 3, pp. 267-278.

- DEBREU, G. (1991). "The Mathematization of Economic Theory". *The American Economic Review*, vol. 81, no. 1, pp. 1-7.
- DAVIS, J. B., HANDS, D. W. y MAKI (Editors) (1998). "Chaos in Economics". In *The Handbook of Economic Methodology*, pp. 59-64.
- DAVIS, P. J., HERSH, R. y MARCHISOTTO, E. A. (1995). "The Mathematical Experience". Boston: Birkhäuser.
- DOCKNER, E., JORGENSEN, S., VAN LONG, N. y SORGER, G. (2006). "Differential Games in Economics and Management Science". Cambridge University Press, New York.
- DOCKNER, E. J. y SORGER, G. (1996). "Existence and Properties of Equilibria for a Dynamic Game on Productive Assets". *Journal of Economic Theory*, vol. 71, Issue 1, pp. 209-227.
- DOW, S. (1998). "Editorial Note". *The Economic Journal*, vol.108 (451), pp. 1826-1828.
- DOW, S. (1999). "The Use of Mathematics in Economics", paper presented to the ESRC Public Understanding of Mathematics Seminar, Birmingham 21-2 May.
- EICHBERGER, J. (1993). "Game Theory for Economists". Academic Press, Inc. San Diego.
- EVANS, G. W. y HONKAPOHJA, S. M. S. (1995). "Local Convergence of Recursive Learning to Steady States and Cycles in Stochastic Nonlinear Models". *Econometrica*, vol. 63, Issue 1, pp. 195-206.
- FARMER, J. (1999). "Physicists Attempt to Scale the Ivory Towers Of Finance". *Computing in Science and Engineering*. Noviembre-Diciembre, pp. 26-39.
- FOX, CH. (1987). "An Introduction to the Calculus of Variations". Dover, Oxford, UK.
- GALOR, O. y WEIL, N. D. (2000). "Population Technology and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond". *The American Economic Review*, vol. 90, Issue 4, pp. 806-828.
- GRANDMONT, J. (1992). "Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-Dimensional Dynamical Systems". in Benhabib, J. (ed). *Cycles and chaos in economic equilibrium*. Princeton University Press, New Jersey, pp. 44-63.
- GREIF, A. (1994). "Cultural Beliefs and the Organization of Society: A Historical and Theoretical Reflection on Collectivist and Individualist Societies". *Journal of Political Economy*, vol. 102, Issue 5, pp. 912-50.
- HOLMGREN, R., (2000). "A First Course in Discrete Dynamical Systems". (Second edition). Springer-Verlag. New York.
- HOWITT, P. (1999). "Steady Endogenous Growth with Population and R & D Inputs Growing". *Journal of Political Economy*, vol. 107, Issue 4, pp.715-730.
- INDERST, R. (2004). "Contractual Distortions in a Market with Frictions". *Journal of Economic Theory*, vol. 116, Issue 1, pp. 155-176.
- KAILATZIDAKIS, P., MAMUNEAS, T. y STENGOS T. (2003). "Rankings of Academic Journals and Institutions in Economics". *Journal of the European Economic Association*, vol. 1 (6) pp. 1346-1366.
- KEIFITZ, N. (1983). "The Evolution of Malthus' Thought: Malthus as a Demographer". In Dupaquier, J., *Malthus Past and Present*, Academic Press, London.

- KELLER, W. (2002). "Geographic Localization of International Technology Diffusion". *The American Economic Review*, vol. 92, no. 1, pp. 120-142.
- KRUGMAN, P. (1998). "Two Cheers for Formalism". *Economic Journal*, vol. 108, Issue 451, pp. 1829-1836.
- LAGOS, R. y WRIGHT, R. (2003). "Dynamics, Cycles, and Sunspot Equilibria in 'Genuinely Dynamic, Fundamentally Disaggregative' Models of Money". *Journal of Economic Theory*, vol. 109, Issue 2, pp. 156-171.
- LUCAS, JR., R. E. (1990). "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?". *The American Economic Review*, vol. 80, no. 2, pp. 92-96.
- MALTHUS, T. R. (1997). "Ensayo Sobre el Principio de Población". FCE, México.
- MIROWSKI, P. (1989). "More Heat than Light". Cambridge University Press, New York.
- MIROWSKI, P. (2002). "Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science". Cambridge University Press, New York.
- MITRA, T. (1996). "An Exact Discount Factor Restriction for Period-Three Cycles in Dynamic Optimization Models". *Journal of Economic Theory*, vol. 69, pp. 281-305.
- MITRA, T. (1998). "A Sufficient Condition for Topological Chaos with an Application to a Model of Endogenous Growth". *Journal of Economic Theory*, vol. 96, pp. 133-152.
- MITRA, T. y NISHIMURA, K. (2001). "Introduction to Intertemporal Equilibrium Theory: Indeterminacy, Bifurcations, and Stability". *Journal of Economic Theory*, Volume 96, Issues 1-2, pp. 1-12.
- NISHIMURA, K. y YANO, M. (1995). "Nonlinear Dynamics and Chaos in Optimal Growth: An Example". *Econometrica*, vol. 63, no. 4, pp. 981-1001.
- NOE, T. H. y REBELLO, M. J. (1994). "The Dynamics of Business Ethics and Economic Activity". *The American Economic Review*, vol. 84, no. 3, pp. 531-547.
- NOLDEKE, G. y E. VAN DAMME. (1990). "Signalling in a Dynamic Labour Market". *Review of Economic Studies*, vol. 57, pp. 1-23.
- OTT, E. (2002). "Chaos in Dynamical Systems". (Second edition). Cambridge University Press, Cambridge UK.
- RAPPOPORT, P. y WHITE, E. (1994). "The New York Stock Market in the 1920's and 1930's: Did Stock Prices Move Together Too Much?". NBER Working Papers from National Bureau of Economic Research, No 4627.
- RITZBERGER, K. y WEIBULL, J. W. (1995). "Evolutionary Selection in Normal-Form Games". *Econometrica*, vol. 63, no. 6, pp. 1371-1399.
- SCHEINKMAN, J. A. (1990). "Nonlinearities in Economic Dynamics". *The Economic Journal*, vol. 100, no. 400, Conference Papers, pp. 33-48.
- SEGERSTROM, P. (1991). "Innovation, Imitation, and Economic Growth". *Journal of Political Economy*, vol. 99, Issue 4, pp. 807-827.
- SMALE, S. (1998). "Mathematical Problems for the Next Century". *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, no. 2, pp. 7-15.
- SPENCE, A. M. (1974). "Competitive and Optimal Responses to Signaling: An analysis of Efficiency and Distribution". *Journal of Economic Theory*, vol. 8, pp. 296-332.

- SRINIVASANT, N. (1998). "Introduction to part 3". In Chenery, H. and Srinivasan, T.N., *Handbook of development economics*, vol. 1, Elsevier, Amsterdam.
- STIGLER, G. J., STIGLER, S. M. y FRIEDLAND, C. (1995). "The Journals of Economics". *Journal of Political Economy*, vol. 103, Issue 2, pp. 331-59
- TORNELL, A. y VELASCO, A. (1992). "The Tragedy of the Commons and Economic Growth: Why Does Capital Flow from Poor to Rich Countries?". *Journal of Political Economy*, vol. 100, Issue 6, pp. 1208-1231.
- TROGER, T. (2002). "Why Sunk Costs Matter for Bargaining Outcomes: An Evolutionary Approach". *Journal of Economic Theory*, vol. 102, Issue 2, pp. 375-402.
- VARIAN, H. (1991). "Dynamical Systems with Application to Economics". in Arrow, K. y Intriligator, M.(ed.), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 1, North Holland, New York, pp. 93-110.
- WEINTRAUB, R. (2002). "How Economics Became a Mathematical Science". Duke University Press, Durham.
- WEINTRAUB, R. (1991). "Stabilizing Dynamics. Constructing Economic Knowledge". Cambridge University Press, Cambridge.

Novedades

DIVISIÓN DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA

- Casar, Ma. Amparo, *La cultura política de los políticos en el México democrático*, DTAP-193
- Arellano, David y Lepore Walter, *Economic Growth and Institutions: The Influence of External Actors*, DTAP-194
- Casar, Ma. Amparo, *Los gobiernos sin mayoría en México: 1997-2006*, DTAP-195
- De Angoitia, Regina, *La evolución de los portales del gobierno federal: la experiencia de ocho dependencias*, DTAP-196
- Cabrero, Enrique, *De la descentralización como aspiración a la descentralización como problema*, DTAP-197
- Sour, Laura y Eunises Rosillo, *¿Cuáles son los resultados del presupuesto por resultados?*, DTAP-198
- Arellano, David y Walter Lepore, *Prevención y control de conflictos de interés: lecciones para la Administración Pública Federal en México...*, DTAP-199
- Sour, Laura y Fredy Girón, *El efecto flypaper de las transferencias intergubernamentales del ramo 28...*, DTAP-200
- Mariscal, Judith, *Convergencia tecnológica y armonización regulatoria en México: una evaluación de los instrumentos regulatorios*, DTAP-201
- Mariscal, Judith, *Market Structure in the Latin American Mobile Sector*, DTAP-202

DIVISIÓN DE ECONOMÍA

- Elbittar, Alexander, Rodrigo Harrison y Roberto Muñoz, *Network Structure in a Link-formation Game: An Experimental Study*, DTE-405
- Carreón, Víctor y Malena Svarch, *Impacto del crédito en el bienestar*, DTE-406
- Cermeño, Rodolfo, *Median-Unbiased Estimation in Panel Data...*, DTE-407
- Unger, Kurt, *Apertura y empleos: la economía de los sectores comerciables y no comerciables de las regiones de México*, DTE-408
- Gómez Aurora y Aldo Musacchio, *Public Finance, Foreign Creditors, and the Costs of the Mexican Revolution*, DTE-409
- Gómez, Aurora, *Networks and Entrepreneurship: The Modernization of Textile Production and Distribution in Porfirian Mexico*, DTE-410
- Gómez Aurora y Rodrigo Parral, *La revolución mexicana y la creación y disolución de las empresas*, DTE-411
- Gómez, Aurora, *From Company Stores to Consumer's Cooperatives and the Worker's Bank in the Orizaba Valley Textile Mills*, DTE-412
- Gómez, Aurora y César Guerrero, *To Open or Not to Open: The Causes, Timing and Consequences of Protectionism*, DTE-413
- Scott, John, *Salud, sistemas de salud y pobreza: una síntesis de la literatura*, DTE-414

DIVISIÓN DE ESTUDIOS INTERNACIONALES

- Ortiz Mena, Antonio y Fagan Drew, *Relating to the Powerful One: Canada and Mexico's Trade and Investment Relations with the United States*, DTEI-158
- Schiavon, Jorge, *Política exterior y opinión pública: México ante el mundo*, DTEI-159
- Sotomayor, Arturo, *Los métodos cualitativos en la ciencia política contemporánea*, DTEI-160
- González, Guadalupe, *Democratización y política exterior: ¿el fin del predominio presidencial?*, DTEI-161
- González, Guadalupe, *Percepciones sociales sobre la migración en México y Estados Unidos: ¿hay espacios para cooperar?*, DTEI-162
- Bernhard, William y David Leblang, *Standing Tall When the Wind Shifts: Financial Market Responses to Elections, Disasters and Terrorist Attacks*, DTEI-163
- Velázquez, Rafael, *La relación entre el Ejecutivo y el Congreso en materia de política exterior durante el sexenio de Vicente Fox...*, DTEI-164
- Ruano, Lorena, *De la exaltación al tedio: las relaciones entre México y la Unión Europea...*, DTEI-165
- Martínez, Ferrán e Ignacio Lago Peñas, *Why new Parties? Changes in the number of Parties over time within Countries*, DTEI-166
- Sotomayor, Arturo, *México y la ONU en momentos de transición: entre el activismo internacional, parálisis interna y crisis internacional*, DTEI-167

DIVISIÓN DE ESTUDIOS JURÍDICOS

- López, Sergio y Posadas Alejandro, *Las pruebas de daño e interés público en materia de acceso a la información. Una perspectiva comparada*, DTEJ-18
- Magaloni, Ana Laura, *¿Cómo estudiar el derecho desde una perspectiva dinámica?*, DTEJ-19
- Fondevila, Gustavo, *Cumplimiento de normativa y satisfacción laboral: un estudio de impacto en México*, DTEJ-20
- Posadas, Alejandro, *La educación jurídica en el CIDE (México). El adecuado balance entre la innovación y la tradición*, DTEJ-21
- Ingram, Matthew C., *Judicial Politics in the Mexican States: Theoretical and Methodological Foundations*, DTEJ-22
- Fondevila, Gustavo e Ingram Matthew, *Detención y uso de la fuerza*, DTEJ-23
- Magaloni, Ana Laura y Ana María Ibarra Olguín, *La configuración jurisprudencial de los derechos fundamentales...*, DTEJ-24
- Magaloni, Ana Laura, *¿Por qué la Suprema Corte no ha sido un instrumento para la defensa de derechos fundamentales?*, DTEJ-25
- Magaloni, Ana Laura, *Arbitrariedad e ineficiencia de la procuración de justicia: dos caras de la misma moneda*, DTEJ-26
- Ibarra, Ana María, *Los artificios de la Dogmática Jurídica*, DTEJ-27

DIVISIÓN DE ESTUDIOS POLÍTICOS

- Lehoucq, Fabrice, *Policymaking, Parties and Institutions in Democratic Costa Rica*, DTEP-192
- Benton, Allyson, *Do Investors Assess the Credibility of Campaign Commitments? The Case of Mexico's 2006 Presidential Race*, DTEP-193
- Nacif, Benito, *Para entender las instituciones políticas del México democrático*, DTEP-194
- Lehoucq, Fabrice, *Why is Structural Reform Stagnating in Mexico? Policy Reform Episodes from Salinas to Fox*, DTEP-195
- Benton, Allyson, *Latin America's (Legal) Subnational Authoritarian Enclaves: The Case of Mexico*, DTEP-196
- Hacker, Casiano y Jeffrey Thomas, *An Antitrust Theory of Group Recognition*, DTEP-197
- Hacker, Casiano y Jeffrey Thomas, *Operationalizing and Reconstructing the Theory of Nationalism*, DTEP-198
- Langston, Joy y Allyson Benton, *"A ras de suelo": Candidate Appearances and Events in Mexico's Presidential Campaign*, DTEP-199
- Negretto, Gabriel, *The Durability of Constitutions in Changing Environments...*, DTEP-200
- Langston, Joy, *Hasta en las mejores familias: Madrazo and the PRI in the 2006 Presidential Elections*, DTEP-201

DIVISIÓN DE HISTORIA

- Meyer, Jean, *La Iglesia católica de los Estados Unidos frente al conflicto religioso en México, 1914-1920*, DTH-43
- Barrón, Luis, *Revolucionarios sí, pero Revolución no*, DTH-44
- Pipitone, Ugo, *Oaxaca: comunidad, instituciones, vanguardias*, DTH-45
- Barrón, Luis, *Venustiano Carranza: un político porfiriano en la Revolución*, DTH-46
- Tenorio, Mauricio y Laurencio Sanguino, *Orígenes de una ciudad mexicana: Chicago y la ciencia del Mexican Problem (1900-1930)*, DTH-47
- Rojas, Rafael, *José María Heredia y la tradición republicana*, DTH-48
- Rojas, Rafael, *Traductores de la libertad: el americanismo de los primeros republicanos*, DTH-49
- Sánchez, Mónica Judith, *History vs. the Eternal Present or Liberal Individualism and the Morality of Compassion and Trust*, DTH-50
- Medina, Luis, *Salida: los años de Zedillo*, DTH-51
- Sauter, Michael, *The Edict on Religion of 1788 and the Statistics of Public Discussion in Prussia*, DTH-52

Ventas

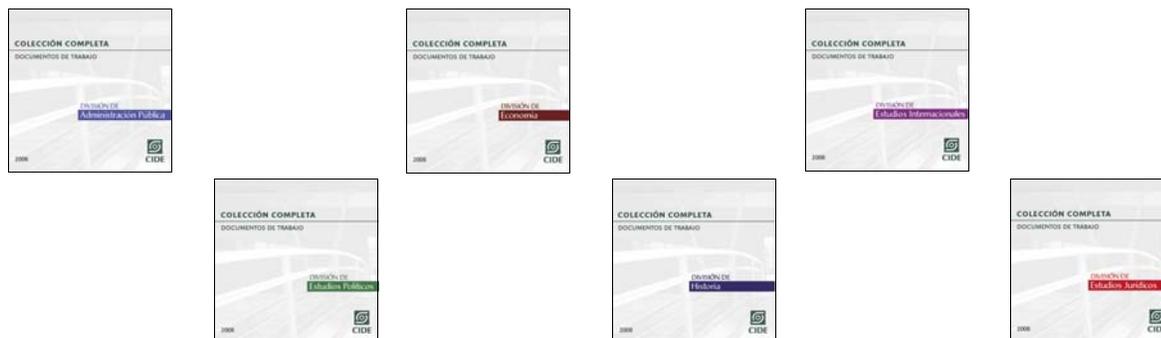
El CIDE es una institución de educación superior especializada particularmente en las disciplinas de Economía, Administración Pública, Estudios Internacionales, Estudios Políticos, Historia y Estudios Jurídicos. El Centro publica, como producto del ejercicio intelectual de sus investigadores, libros, documentos de trabajo, y cuatro revistas especializadas: *Gestión y Política Pública*, *Política y Gobierno*, *Economía Mexicana Nueva Época* e *Istor*.

Para adquirir cualquiera de estas publicaciones, le ofrecemos las siguientes opciones:

VENTAS DIRECTAS:	VENTAS EN LÍNEA:
Tel. Directo: 5081-4003 Tel: 5727-9800 Ext. 6094 y 6091 Fax: 5727 9800 Ext. 6314 Av. Constituyentes 1046, 1er piso, Col. Lomas Altas, Del. Álvaro Obregón, 11950, México, D.F.	Librería virtual: www.e-cide.com Dudas y comentarios: publicaciones@cide.edu

¡¡Colecciones completas!!

Adquiere los CDs de las colecciones completas de los documentos de trabajo de todas las divisiones académicas del CIDE: Economía, Administración Pública, Estudios Internacionales, Estudios Políticos, Historia y Estudios Jurídicos.



¡Nuevo! ¡¡Arma tu CD!!



Visita nuestra Librería Virtual www.e-cide.com y selecciona entre 10 y 20 documentos de trabajo. A partir de tu lista te enviaremos un CD con los documentos que elegiste.